

# **FONDAMENTI DI MECCANICA E BIOMECCANICA**

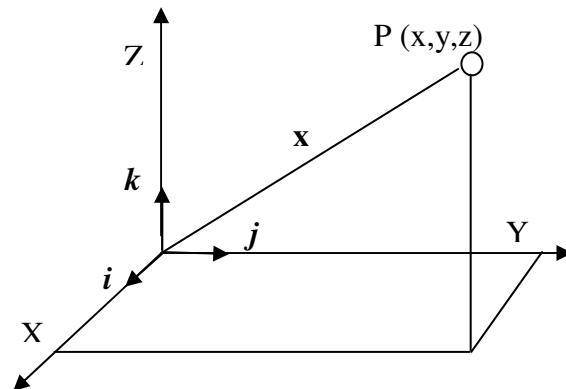
appunti delle lezioni del corso tenuto dal

prof. Bruno Picasso

# 1. SISTEMI DI COORDINATE E VETTORI

## 1.1 Coordinate Cartesiane

Una terna Cartesiana destra, o levogira, ha gli assi disposti come le tre dita della mano destra, pollice secondo x, indice secondo y, medio secondo z. Un osservatore che osserva il piano XY dalla parte positiva dell'asse Z vede X ruotare verso Y in senso antiorario. Analogamente, un osservatore disposto secondo X vedrà Y ruotare in senso per sovrapporsi a Z, infine da Y si vedrà Z ruotare in senso antiorario verso X. Un punto P di coordinate x,y,z è rappresentato dal vettore colonna :



$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad \text{che contiene nell'ordine le sue coordinate cartesiane, o anche dall'espressione}$$

equivalente  $x \cdot \mathbf{i} + y \cdot \mathbf{j} + z \cdot \mathbf{k}$ , dove  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  sono i versori (vettori unitari) degli assi X, Y, Z. Per rendere più agevoli le trasformazioni tra diversi sistemi di coordinate spesso s'introduce una quarta coordinata, impiegata nelle trasformazioni prospettiche. Le coordinate di questo tipo prendono il nome di coordinate omogenee.

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad \text{le coordinate cartesiane di P si ottengono dividendo } x, y, z \text{ per } \alpha$$

Ricordiamo che le coordinate x,y,z sono le lunghezze delle proiezioni del vettore  $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$  sugli assi coordinati, proiezioni date dal prodotto scalare di  $\mathbf{r}$  per i versori  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ . Avremo quindi:

$$x = \mathbf{r} \circ \mathbf{i} \quad y = \mathbf{r} \circ \mathbf{j} \quad z = \mathbf{r} \circ \mathbf{k} \quad \text{avendo indicato con il simbolo } \circ \text{ il prodotto scalare.}$$

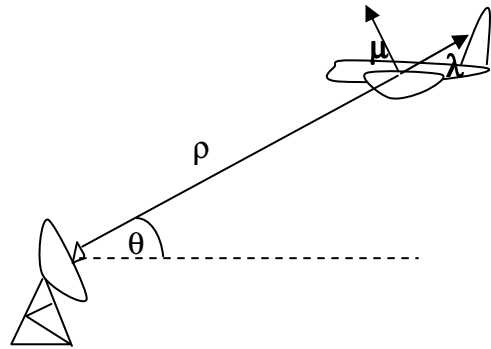
Se si conoscono le coordinate degli estremi A, B il vettore  $\mathbf{AB}$  è rappresentato da :

$$\mathbf{AB} = \begin{Bmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{Bmatrix}$$

Un vettore  $\mathbf{AB}$  può essere indicato con i simboli  $\mathbf{AB}, (\mathbf{B}-\mathbf{A}), \mathbf{r}_{AB}, \cdot$ . In questo testo i vettori saranno sempre indicati in **grassetto**, nella letteratura sono anche comuni i simboli  $\vec{r}, \overline{r}, \underline{r}$  con eventuali indici. Nelle costruzioni grafiche e figure di questo testo l'informazione sulla direzione e verso del vettore è data dal segmento che lo rappresenta, il nome del vettore sarà quindi scritto in caratteri normali.

### 1.2 Coordinate polari

Non sempre le coordinate Cartesiane rispondono bene alle esigenze di rappresentazione di un problema. Consideriamo ad esempio un sistema radar per il controllo di velivoli. Assumendo che il moto del velivolo avvenga in un piano, la sua posizione è univocamente determinata dal valore della distanza  $\rho$ , misurata elettronicamente dal radar, e dall'angolo  $\theta$ . Considerando un sistema di coordinate locali, rappresentate dai versori  $\lambda, \mu, \nu$  si ha :



$$\mathbf{p} = \rho \boldsymbol{\lambda} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \rho \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \rho \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} = \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \omega \rho \boldsymbol{\mu} \quad (1.2.1)$$

La velocità è quindi somma di due componenti, una radiale, diretta come  $\lambda$ , l'altra tangenziale, diretta secondo  $\mu$ . Per calcolarle occorre conoscere le leggi di variazione della distanza  $\rho$  e dell'angolo  $\theta$  con il tempo, fornite dalla strumentazione radar. L'accelerazione si ottiene come derivata dell'espressione della velocità scritta prima.

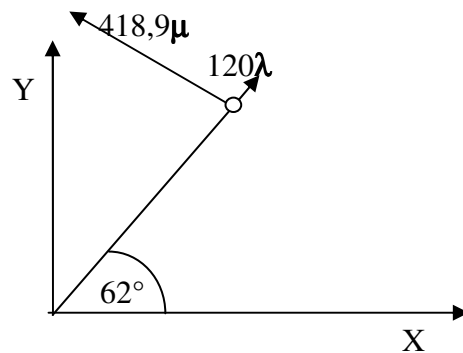
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\rho} \boldsymbol{\lambda} + \rho \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \rho \boldsymbol{\lambda} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\rho} \boldsymbol{\lambda} = (\ddot{\rho} - \omega^2 \rho) \boldsymbol{\lambda} + (\dot{\omega} \rho + 2\omega \dot{\rho}) \boldsymbol{\mu} \quad (1.2.2)$$

#### Esempio

Un aereo, è rilevato dal radar ad una distanza  $\rho$  di 60 km, con un angolo  $\theta$  pari a  $62^\circ$ . Si abbia inoltre dal radar  $\dot{\rho} = 120 \text{ m/s}$  e  $\dot{\theta} = 0,4^\circ/\text{s}$ . Si voglia determinare la velocità orizzontale e quella ascensionale del velivolo.

Applicando le formule precedenti, per la velocità nel sistema locale si ha:

$$\mathbf{v} = 120 \boldsymbol{\lambda} + 0,4 * \frac{\pi}{180} * 60.000 \boldsymbol{\mu} = 120 \boldsymbol{\lambda} + 418,9 \boldsymbol{\mu}$$



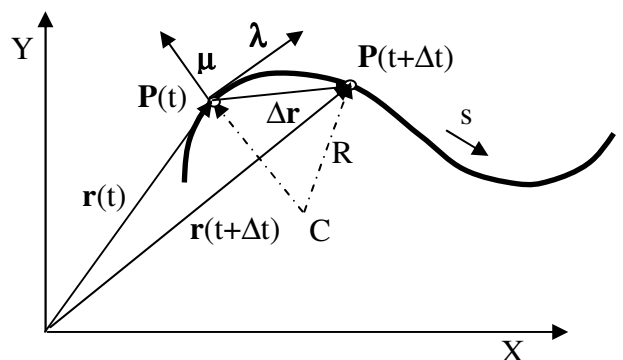
Per trovare le componenti di velocità secondo X e Y, come richiesto, è sufficiente applicare una semplice trasformazione di coordinate per passare dal sistema locale a quello globale. Ricordando quanto detto a proposito delle trasformazioni di rotazione si ha:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(62^\circ) & -\sin(62^\circ) \\ \sin(62^\circ) & \cos(62^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_\lambda \\ v_\mu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(62^\circ) & -\sin(62^\circ) \\ \sin(62^\circ) & \cos(62^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 120 \\ 418,9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -313 \\ 302,6 \end{Bmatrix}$$

Il velivolo sta quindi procedendo in senso orizzontale nella direzione negativa dell'asse X e sta salendo nella direzione positiva di Y.

### 1.3 Coordinate locali

In molti casi l'adozione di un sistema di coordinate Cartesiane "fisso", non è conveniente. Quando parliamo di sistema fisso dobbiamo tener presente che questa condizione è riferita al tipo di problema che si considera. Se, ad esempio, consideriamo il moto di un veicolo terrestre, un sistema di coordinate



solidale al terreno può essere considerato “fisso”, anche se sappiamo che la terra è dotata di un moto di rotazione intorno al suo asse e di uno di rivoluzione intorno al sole. In molti casi, nello studio del moto di un punto, è conveniente ricorrere ad un sistema di riferimento Cartesiano solidale al punto nella sua evoluzione. Si consideri un punto materiale, dotato di moto piano, che percorra una traiettoria curvilinea: Sulla traiettoria sia definito un sistema di coordinate curvilinee  $s$ , che misura la distanza percorsa dal punto mobile sulla sua traiettoria, a partire da una posizione assunta come riferimento. Si ha:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad \mathbf{v}_P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

La direzione del vettore  $\Delta \mathbf{r}$ , al tendere di  $\Delta t$  a zero, tende a quella della tangente alla traiettoria nel punto P, quella del versore  $\boldsymbol{\lambda}$ , il modulo della velocità è dato dall’espressione infinitesima del rapporto spazio su tempo  $\frac{ds}{dt}$ , si ha quindi:

$$\mathbf{v}_P = \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\lambda} \quad (1.3.1)$$

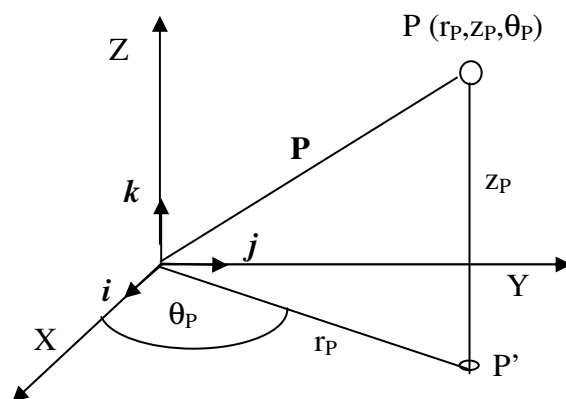
L’accelerazione del punto P si ottiene derivando l’espressione precedente:

$$\mathbf{a}_P = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\lambda} + \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\lambda} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\lambda} + \frac{ds}{dt} \boldsymbol{\omega} \mathbf{v} \times \boldsymbol{\lambda} = \frac{d^2s}{dt^2} \boldsymbol{\lambda} + \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{R} \boldsymbol{\mu} \quad (1.3.2)$$

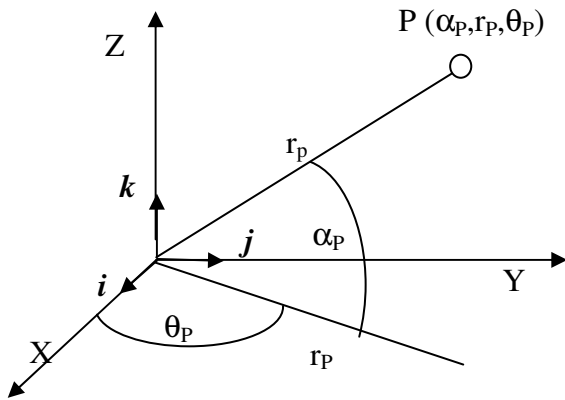
Velocità e accelerazione sono quindi espresse in funzione di un sistema di riferimento locale con origine nella posizione del punto materiale nell’istante considerato e versori  $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v}$ , con  $\boldsymbol{\lambda}$  tangente alla traiettoria nel punto P,  $\boldsymbol{\mu}$  diretto come la congiungente il centro di curvatura della traiettoria con la posizione del punto,  $\mathbf{v}$  perpendicolare ai primi due e orientato in modo da formare con questi una terna destra. Nella figura precedente  $\mathbf{v}$  è perpendicolare al piano del disegno e diretto da questo verso l’osservatore.

#### 1.4 Coordinate Cilindriche

Nella figura è rappresentato un sistema di riferimento cilindrico. Le coordinate sono l’angolo di rotazione della proiezione del vettore P sul piano XY rispetto all’asse di riferimento X, l’altezza  $z_P$  del punto P sul piano XY, la distanza  $r_P$  del punto P’, proiezione del punto P sul piano XY, dall’origine.



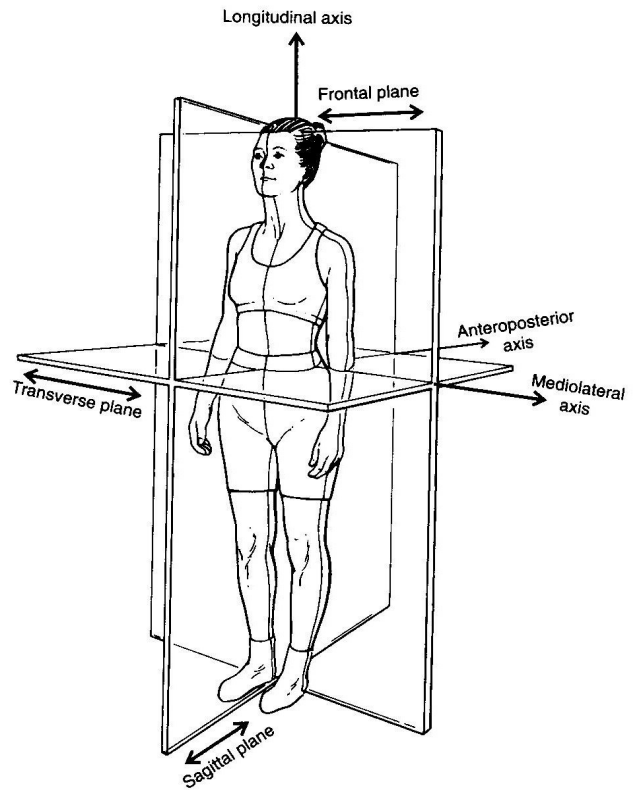
#### 1.5 Coordinate sferiche.



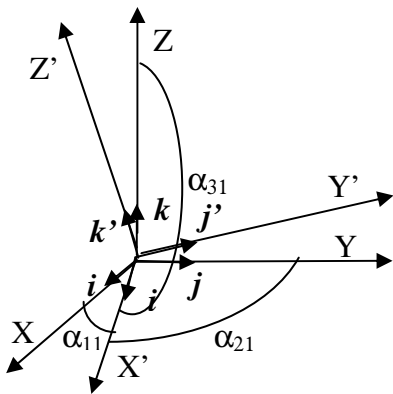
La figura a sinistra mostra un riferimento sferico nel quale le coordinate del punto P sono i e angoli  $\alpha_P, \theta_P$  e la distanza  $r_P$  del punto considerato dall'origine del sistema di riferimento. Lasciamo al lettore di scrivere per esercizio le semplici formule di passaggio ad un sistema Cartesiano, in analogia con quanto è stato già fatto per le coordinate polari.

*Piani di riferimento per l'analisi biomeccanica.*

La figura mostra i tre piani di riferimento comunemente impiegati nell'analisi statica cinematica e dinamica del corpo umano. I due piani verticali prendono il nome rispettivamente di piano frontale e sagittale, mentre il piano trasversale è orizzontale. Il piano sagittale è piano di simmetria per il corpo umano, simmetria puramente teorica in quanto, come è noto, le due parti dell'organismo presentano differenze morfologiche esterne ed interne. Si pensi alla disposizione non simmetrica di molti organi interni. Il piano trasversale taglia gli altri due in corrispondenza del baricentro. L'intersezione dei piani sagittale e frontale individua l'asse longitudinale, mentre le intersezioni di questi piani con quello trasversale individuano rispettivamente gli assi anteroposteriore e mediolaterale. Poiché il sistema di riferimento presentato è di impiego comune nella medicina ad esso converrà riferirsi per stabilire una comunicazione scientifica in ambito multidisciplinare.



*1.6 Trasformazioni di rotazione per i sistemi Cartesiani*



Si desidera esprimere le coordinate di un punto o le componenti di un vettore in un nuovo sistema di coordinate, avente la stessa origine di quello primitivo, ma ruotato rispetto ad esso. Per esprimere questa trasformazione è necessario conoscere la matrice dei coseni direttori, in altre parole la matrice dei coseni degli angoli che gli assi del sistema ruotato formano con quelli del sistema originario. Nella figura sono rappresentati i tre angoli  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}$  che l'asse X' mobile forma con i tre assi del sistema fisso. Il sistema completo dei 9 angoli, che gli assi del sistema mobile formano con quelli del sistema fisso, definisce completamente la posizione angolare del primo rispetto al secondo. Si ha poi:

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}' &= \cos(\widehat{XX'})\mathbf{i} + \cos(\widehat{YX'})\mathbf{j} + \cos(\widehat{ZX'})\mathbf{k} = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k} \\
\mathbf{j}' &= \cos(\widehat{XY'})\mathbf{i} + \cos(\widehat{YY'})\mathbf{j} + \cos(\widehat{ZY'})\mathbf{k} = a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k} \\
\mathbf{k}' &= \cos(\widehat{XZ'})\mathbf{i} + \cos(\widehat{YZ'})\mathbf{j} + \cos(\widehat{ZZ'})\mathbf{k} = a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{1.6.2}$$

Avendo posto  $a_{ij} = \cos\alpha_{ij}$  e  $\alpha_{ij}$  l'angolo tra la direzione  $i$  del sistema fisso e quella  $j$  del sistema mobile. La matrice  $\mathbf{A}$  è ortonormale, gode della proprietà che la sua inversa coincide con la sua trasposta. Se consideriamo un generico punto  $\mathbf{P}$  la cui posizione rispetto al sistema mobile sia

rappresentata dal vettore  $\mathbf{P}' = [x' \quad y' \quad z'] \begin{Bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{Bmatrix}$ , ricorrendo alle relazioni precedenti si ha :

$$\text{Si ha allora : } \mathbf{P}' = [x' \quad y' \quad z'] \begin{Bmatrix} \mathbf{i}' \\ \mathbf{j}' \\ \mathbf{k}' \end{Bmatrix} = [x' \quad y' \quad z'] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix} = [x \quad y \quad z] \begin{Bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Quindi : } [x \quad y \quad z] = [x' \quad y' \quad z'] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = [x' \quad y' \quad z'] * \mathbf{A}^T$$

Si ha anche per trasposizione:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \mathbf{A} * \mathbf{P}' \tag{1.6.3}$$

Per passare dalle coordinate di un punto dello spazio, espresso rispetto ad un sistema mobile, a quelle rispetto ad un sistema fisso, è sufficiente premoltiplicare il vettore delle coordinate rispetto al sistema mobile per la matrice dei coseni direttori del sistema mobile rispetto al sistema fisso. Formalizziamo il risultato precedente dicendo che per due sistemi ortogonali (A),(B) con le origini coincidenti ma ruotati angularmente vale l'espressione :

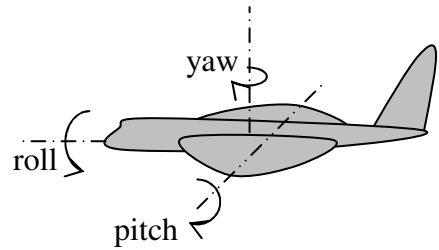
$${}^A \mathbf{P} = {}^A \mathbf{R}^B * {}^B \mathbf{P} \tag{1.6.4}$$

In cui con gli indici A,B abbiamo specificato il sistema di riferimento per il vettore posizione di  $\mathbf{P}$ , mentre  $\mathbf{R}$  è la matrice dei coseni direttori, trattata in precedenza. Se abbiamo diversi sistemi di coordinate (A),(B),(C) e (C) si possa considerare ottenuto per rotazione da (B), (B) per rotazione da (A) abbiamo:

$${}^A \mathbf{P} = {}^A \mathbf{R}^B {}^B \mathbf{R}^C * {}^C \mathbf{P} = {}^A \mathbf{R}^C * {}^C \mathbf{P} \tag{1.6.5}$$

Merita un chiarimento l'ordine delle matrici nel prodotto. Nell'esempio precedente abbiamo supposto che il sistema di riferimento (B) sia ottenuto da (A) per rotazione e ugualmente (C) da (B).

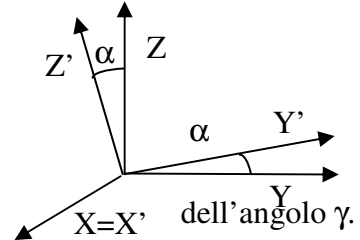
Se la rotazione è compiuta rispetto ad un asse dell'ultimo sistema ottenuto, occorrerà postmultiplicare la matrice di rotazione per quelle che rappresentano le rotazioni precedenti. Se invece compiamo una serie di rotazioni successive rispetto ad un sistema che non varia in orientamento, le successive matrici vanno premoltiplicate. Nel caso di un corpo mobile nello spazio come un aeroplano si può pensare di compiere una rotazione del velivolo intorno ad un asse orizzontale trasversale per salire di quota ("pitch" o cabrata) per poi cambiare anche la direzione di volo inclinando le ali intorno all'asse longitudinale ("roll" o rollio). La seconda rotazione avviene rispetto all'ultimo sistema di riferimento ottenuto, quello solidale con l'aeroplano, quindi è rispetto ad assi mobili. La matrice di rotazione corrispondente al rollio dovrà essere post-moltiplicata per quella della cabrata. Se invece la seconda rotazione è compiuta rispetto all'asse longitudinale originario l'ordine del prodotto dovrà essere invertito.



*Trasformazioni elementari di rotazione intorno agli assi coordinati*

Si cerchi la matrice che esprime una rotazione intorno all'asse X di un angolo  $\alpha$ . Osservando la figura e ricordando il significato delle colonne della matrice dei coseni si ottiene:

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \quad (1.6.6)$$



Analogamente per rotazioni intorno a Y dell'angolo  $\beta$  e a Z dell'angolo  $\gamma$ .

$$\mathbf{R}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \quad (1.6.7) \quad \mathbf{R}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6.8)$$

Che la rappresentazione di successive rotazioni intorno ad assi mobili comporti la postmultiplicazione delle successive matrici elementari può essere agevolmente dimostrato ricorrendo ad un semplice esempio. Supponiamo che due sistemi siano inizialmente coincidenti ed uno dei due subisca una prima rotazione dell'angolo  $\gamma$  intorno all'asse Z comune, seguita da una seconda rotazione di  $\alpha$  intorno all'asse X' ruotato. Possiamo pensare di svolgere questa sequenza di rotazioni operando prima la rotazione intorno a Z, riportando il sistema nella posizione iniziale con una rotazione intorno a Z di  $-\gamma$ , operando la rotazione intorno all'asse X coincidente con X' di  $\alpha$  e ruotando di nuovo il sistema intorno all'asse Z di  $\gamma$ . In questo caso tutte le rotazioni si sono svolte rispetto ad assi fissi e comportano quindi premoltiplicazione. La sequenza sarebbe quindi rappresentata dal prodotto di matrici:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{Z,\gamma} * \mathbf{R}_{X,\alpha} * \mathbf{R}_{Z,-\gamma} * \mathbf{R}_{Z,\gamma} = \mathbf{R}_{Z,\gamma} * \mathbf{R}_{X',\alpha} = \mathbf{R}_{Z',\gamma} * \mathbf{R}_{X',\alpha} \quad (1.6.9)$$

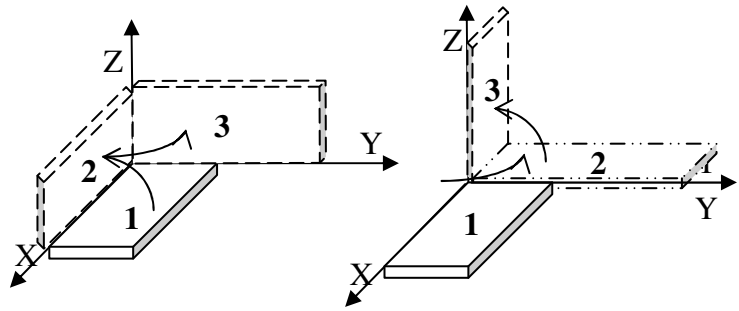
In quanto il prodotto di due rotazioni intorno allo stesso asse di angoli uguali ma opposti in segno fornisce la matrice identità. La sequenza appare quindi come una postmultiplicazione delle due matrici.

La proprietà di non permutabilità delle rotazioni successive può essere facilmente dimostrata. Considerando la successione rispetto ad assi fissi di una rotazione intorno a X di  $\alpha$  seguita da una intorno a Z di  $\gamma$  è, facile vedere che la matrice di rotazione è:

$$\mathbf{R}_{z\gamma, x\alpha} = \mathbf{R}_{x,\alpha} * \mathbf{R}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma c\alpha & c\gamma c\alpha & -s\alpha \\ s\gamma s\alpha & c\gamma s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} \text{ diverso da :}$$

$$\mathbf{R}_{x,\alpha; z,\gamma} = \mathbf{R}_{z,\gamma} * \mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma c\alpha & s\gamma s\alpha \\ s\gamma & c\gamma c\alpha & -c\gamma s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix}$$

Le stesse rotazioni finite, applicate in diverso ordine, producono quindi un risultato diverso. Una prova geometrica di quanto detto in precedenza si può avere considerando una tavoletta disposta inizialmente sul piano X-Y, che viene sottoposta a due sequenze di rotazioni, la prima intorno ad X di 90° e intorno a Z di 90°, la seconda ottenuta invertendo la prima sequenza. Mentre lo spostamento di un punto da una posizione iniziale ad una posizione finale è rappresentato da un vettore, le cui componenti si ottengono per proiezione sugli assi coordinati, non è possibile rappresentare una rotazione finita con un vettore avente come componenti le rotazioni elementari intorno agli assi, che hanno concorso a generare la rotazione complessiva.

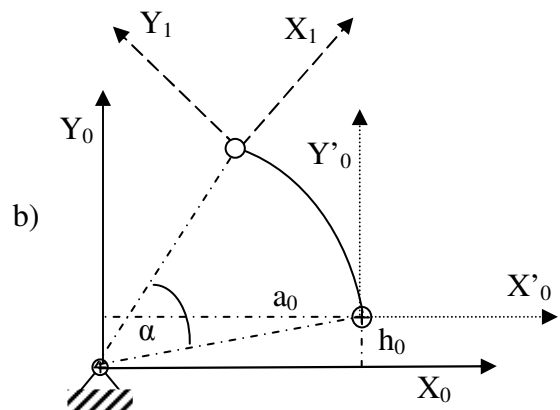
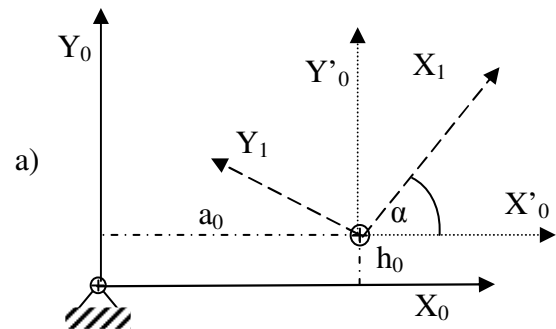


mentre lo spostamento di un punto da una posizione iniziale ad una posizione finale è rappresentato da un vettore, le cui componenti si ottengono per proiezione sugli assi coordinati, non è possibile rappresentare una rotazione finita con un vettore avente come componenti le rotazioni elementari intorno agli assi, che hanno concorso a generare la rotazione complessiva.

### Postmoltiplicare o premoltiplicare ?

Per cercare di chiarire meglio il significato fisico delle operazioni sulle matrici di rotazione mostriamo un semplice esempio relativo ad un sistema mobile, inizialmente coincidente con uno fisso, sottoposto a due diverse sequenze di operazioni elementari :

- Una traslazione dell'origine sul piano X-Y, seguita da una rotazione intorno all'asse Z' mobile.
- Una traslazione dell'origine sul piano X-Y, seguita da una rotazione intorno all'asse Z fisso.



Il risultato della sequenza a) è riportato nella metà superiore della figura. Il sistema ausiliario di assi X'0 Y'0 Z'0 mostra il sistema mobile dopo la traslazione. La rotazione successiva viene compiuta intorno all'asse Z'0. Il sistema mobile nella posizione finale X1 Y1 Z1 sarà ruotato dell'angolo  $\alpha$  e avrà l'origine nel punto di coordinate  $(a_0, h_0, 0)$  rispetto al sistema fisso. La matrice relativa alla sequenza sarà costituita dal prodotto di una traslazione pura per una rotazione intorno ad assi mobili, cioè:



$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & a_0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslazione e rotazione sono indipendenti e la matrice di trasformazione finale si ottiene combinando la parte di rotazione con quella di traslazione negli appositi spazi della matrice  ${}^0_1\mathbf{T}$ .

Una matrice come quella ottenuta rappresenta quindi un'operazione di rototraslazione.

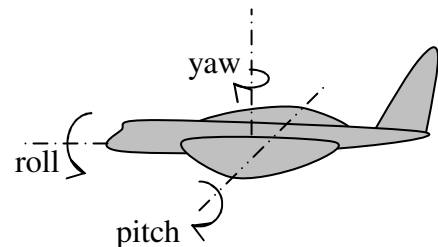
Se invece la rotazione viene compiuta intorno all'asse fisso Z, la situazione finale è diversa. La matrice di trasformazione si ottiene moltiplicando nell'ordine opposto a quello del caso precedente, in quanto ogni operazione rispetto ad assi fissi comporta premoltiplicazione :

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & h_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 & c\alpha*a_0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 & s\alpha*h_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posizione finale del sistema mobile è quella rappresentata in b) nella figura. Si può anche osservare che la rotazione produce effetti anche sulla posizione dell'origine del sistema di riferimento mobile

#### *Roll-pitch-yaw. Rotazioni rispetto ad assi fissi.*

Abbiamo visto che la relazione angolare tra due sistemi ortogonali impiega ben nove parametri per essere definita, cioè le componenti della matrice di rotazione. In effetti per definire completamente la posizione angolare di un sistema rispetto ad un altro bastano tre parametri, in genere tre rotazioni.



La scelta della sequenza di rotazioni e dei relativi assi porta alla definizione di 24 possibili sequenze, 12 rispetto ad assi fissi e 12 rispetto ad assi mobili, tenendo presente che nella sequenza di rotazioni un'asse può comparire due volte. Nella navigazione aerea e marina è frequentemente usata la sequenza di rotazioni intorno ad assi fissi roll, pitch, yaw, costituita da una rotazione intorno all'asse X (roll), una intorno all'asse Y (pitch), una intorno all'asse Z (yaw). Non sempre questa definizione viene rispettata nell'uso corrente. In molti casi le rotazioni roll, pitch, yaw vengono definite rispetto ad assi mobili.

La matrice di rotazione potrà essere facilmente ottenuta ricordando che per rotazioni intorno ad assi fissi X, dell'angolo  $\alpha$ , Y, di  $\beta$ , Z di  $\gamma$  si ha :

$$\mathbf{R}_{X,\alpha,Y,\beta,Z,\gamma} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \quad (1.6.10)$$

$$\begin{bmatrix} c\gamma c\beta & (s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma) & (s\gamma s\alpha + c\gamma s\beta c\alpha) \\ s\gamma c\beta & (c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma) & (c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma) \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

La trasformazione inversa, cioè il passaggio dalla matrice di rotazione agli angoli roll-pitch-yaw è data dalle formule, ricavabili da un semplice ispezione della matrice precedente:

$$\begin{aligned} \beta &= \text{Atan2}(-a_{31}, \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}) \\ \gamma &= \text{Atan2}(a_{21}/c\beta, a_{11}/c\beta) \\ \alpha &= \text{Atan2}(a_{32}/c\beta, a_{33}/c\beta) \end{aligned} \quad (1.6.11)$$

La soluzione presentata non è unica in quanto una seconda soluzione può essere trovata assumendo il segno negativo per la radice nell'espressione di  $\beta$ . Assumendo il segno positivo le soluzioni calcolate per  $\beta$  saranno sempre comprese tra  $-90^\circ$  e  $+90^\circ$ . Se  $\beta=90^\circ$  si ha :

$$\begin{aligned} \beta &= 90^\circ \\ \gamma &= 0 \\ \alpha &= A \tan 2(a_{12}, a_{22}) \end{aligned}$$

Se  $\beta=-90^\circ$  :

$$\begin{aligned} \beta &= -90^\circ \\ \gamma &= 0 \\ \alpha &= -A \tan 2(a_{12}, a_{22}) \end{aligned}$$

La funzione  $\text{Atan2}$ , facilmente rintracciabile in qualunque libreria di routines scientifiche, calcola il valore della tangente partendo da due argomenti (proporzionali al seno e al coseno dell'angolo).

*Angoli di Eulero Z'-Y'-X'*

Un'altra possibilità per descrivere la posizione angolare del sistema mobile rispetto al sistema fisso è la seguente:

Si parta con il sistema mobile coincidente con il sistema fisso. Si ruoti questo di un angolo  $\gamma$  intorno  $Z'$ , coincidente con  $Z$ , poi di un angolo  $\beta$  intorno a  $Y'$  ruotato, poi di un angolo  $\alpha$  intorno  $X'$  ruotato. La matrice di rotazione sarà trovata facilmente come:

$$\mathbf{R}_{Z,\gamma,Y,\beta,X,\alpha} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \quad (1.6.12)$$

$$= \begin{bmatrix} c\gamma c\beta & (s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma) & (s\gamma s\alpha + c\gamma s\beta c\alpha) \\ s\gamma c\beta & (c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma) & (c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma) \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

Si ottiene la stessa matrice del caso precedente. Questo risultato mostra che una sequenza di rotazioni intorno ad assi fissi porta alla stessa posizione angolare della stessa successione di rotazioni, invertita nell'ordine, rispetto ad assi mobili. Non ripetiamo per brevità il risultato già ottenuto per il passaggio dalla matrice di rotazione agli angoli di Eulero.

### Rotazioni infinitesime

Consideriamo due sistemi di riferimento Cartesiani, inizialmente coincidenti, e ruotiamo uno dei sistemi prima intorno all'asse X del sistema fisso dell'angolo  $\alpha$ , poi intorno all'asse Y fisso dell'angolo  $\beta$ , infine intorno all'asse Z fisso dell'angolo  $\gamma$ . La matrice di rotazione complessiva risulta dal prodotto delle matrici elementari di rotazione, cioè:

$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \mathbf{R}_{z,\gamma} * \mathbf{R}_{Y,\beta} * \mathbf{R}_{X,\alpha} = \begin{bmatrix} c\gamma & -s\gamma & 0 \\ s\gamma & c\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha \\ 0 & s\alpha & c\alpha \end{bmatrix} = \quad (1.6.13)$$

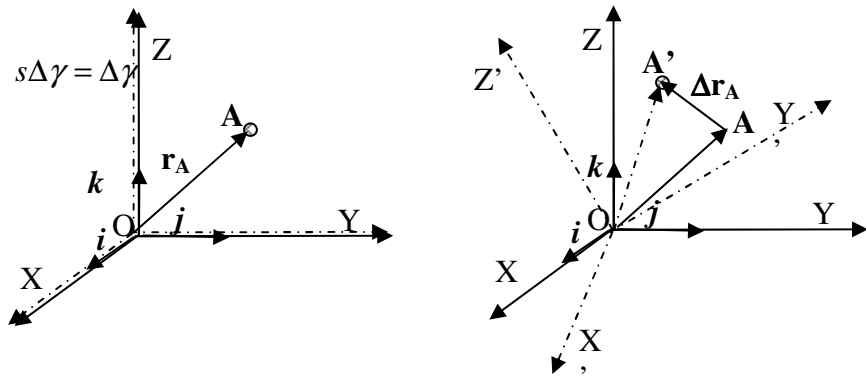
$$= \begin{bmatrix} c\beta c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma & s\alpha s\gamma + c\alpha s\beta c\gamma \\ c\beta s\gamma & c\alpha c\gamma + s\alpha s\beta s\gamma & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma \\ -s\beta & s\alpha c\beta & c\alpha c\beta \end{bmatrix}$$

Sappiamo, per quanto detto prima, che se si cambiasse l'ordine delle rotazioni il risultato sarebbe diverso. Supponiamo ora che le rotazioni applicate siano infinitesime, quindi si possa assumere:

$$c\Delta\alpha = c\Delta\beta = c\Delta\gamma = 1$$

$$s\Delta\alpha = \Delta\alpha \quad s\Delta\beta = \Delta\beta \quad s\Delta\gamma = \Delta\gamma$$

in cui le lettere c e s rappresentano le funzioni seno e coseno. Si assumerà anche che il prodotto di due o più funzioni seno, essendo un infinitesimo di ordine superiore, possa essere trascurato rispetto agli altri termini. Operando le opportune semplificazioni sulla matrice di rotazione scritta in precedenza si ha:



$$\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma & \Delta\beta \\ \Delta\gamma & 1 & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & \Delta\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6.14)$$

Se si suppone che un punto A sia solidale al sistema mobile, a causa della rotazione di questo rispetto al sistema fisso, il punto si porta nel punto A'. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A'} &= \mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} * \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma & \Delta\beta \\ \Delta\gamma & 1 & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & \Delta\alpha & 1 \end{bmatrix} * \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma & \Delta\beta \\ \Delta\gamma & 1 & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & \Delta\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A - y_A\Delta\gamma + z_A\Delta\beta \\ x_A\Delta\gamma + y_A - z_A\Delta\alpha \\ x_A\Delta\beta + y_A\Delta\alpha + z_A \end{Bmatrix} \\ \Delta\mathbf{r}_A &= \mathbf{r}_{A'} - \mathbf{r}_A = \mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} * \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_A = (\mathbf{R}_{\alpha,\beta,\gamma} - \mathbf{I}) * \mathbf{r}_A = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\gamma & \Delta\beta \\ \Delta\gamma & 0 & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & \Delta\alpha & 0 \end{bmatrix} * \mathbf{r}_A = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta\gamma & \Delta\beta \\ \Delta\gamma & 0 & -\Delta\alpha \\ -\Delta\beta & \Delta\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y_A\Delta\gamma + z_A\Delta\beta \\ x_A\Delta\gamma - z_A\Delta\alpha \\ x_A\Delta\beta + y_A\Delta\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ \Delta\gamma \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Il risultato precedente ha carattere generale e mostra che il prodotto vettoriale si può trasformare nel prodotto di una matrice antisimmetrica ottenuta dal primo vettore, per il secondo vettore, ovvero:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (1.6.16)$$

Il risultato è di particolare utilità quando si voglia ad esempio costruire dei programmi in cui si faccia uso del prodotto vettoriale e non esista una routine specifica per questo.

Con riferimento alla penultima equazione scritta, si divida il primo e l'ultimo termine per un intervallo infinitesimo  $\Delta t$ , ottenendo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}_A}{\Delta t} = \mathbf{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \\ \frac{\Delta\beta}{\Delta t} \\ \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A \quad (1.6.17)$$

Il risultato ottenuto concorda con l'espressione già riportata della derivata di un vettore se si tiene conto che nelle nostre ipotesi  $\mathbf{r}_A$  è costante in modulo. I concetti precedenti ci hanno permesso di giungere alla definizione della velocità angolare di un sistema di riferimento passando attraverso una rotazione composta da tre rotazioni infinitesime intorno ai tre assi coordinati. L'ultima relazione mostra che se un punto è solidale a un sistema di riferimento, mobile rispetto ad un altro sistema fisso, la velocità del punto si può semplicemente ottenere come prodotto vettoriale della velocità angolare del sistema mobile per il vettore che rappresenta la posizione del punto. Nelle ultime relazioni abbiamo ommesso di trascrivere l'indicazione dei sistemi di riferimento, perché tutti i vettori che vi appaiono sono definiti rispetto al sistema fisso.

Per riassumere i diversi significati ed impieghi di una matrice di rotazione specifichiamo che:

- 1) *Relazione tra diversi sistemi di riferimento ruotati e con l'origine in comune.* Una matrice di rotazione indica la posizione angolare di un sistema di coordinate rispetto ad un altro sistema di riferimento con il quale il primo sistema ha l'origine in comune.

- 2) *Mappatura*. Una matrice di rotazione permette la determinazione delle coordinate di un punto rispetto ad un sistema (A), quando siano note le coordinate del punto stesso rispetto ad un altro sistema (B), ruotato rispetto al primo, e la matrice di rotazione  ${}^A_B R$ .
- 3) *Operatore di rotazione*. Una matrice di rotazione è un operatore che trasforma le coordinate dei punti di un sistema quando questo sistema ruota rispetto ad un sistema di riferimento.

Diamo un esempio dei tre diversi impieghi della matrice di rotazione accennati prima:

1. La matrice di rotazione del sistema (B) rispetto al sistema (A) sia :

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 0,00 \\ 0,5 & 0,866 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}.$$

E' facile vedere che la matrice risponde alla forma tipica di una rotazione intorno all'asse Z. Il sistema (B) è stato ruotato di  $30^\circ$  intorno all'asse Z del sistema (A). E' importante osservare che l'uso di una matrice di rotazione per descrivere la posizione angolare di un corpo e del sistema ad esso solidale rispetto ad un sistema di riferimento, non è economico né razionale. In effetti, una persona che deve descrivere l'orientazione di un oggetto, ad esempio un arto, rispetto ad un sistema di riferimento, troverebbe gran difficoltà a costruire una matrice di nove elementi, ortonormale e con gli elementi d'ogni colonna e riga i cui quadrati sommati debbano dare l'unità. Ricordiamo che per definire un'orientazione sono necessari tre soli parametri, ad esempio gli angoli d'Eulero.

2. Usando la matrice precedente si determinino le coordinate del punto P rispetto al sistema (A), essendo le coordinate dello stesso punto rispetto al sistema (B) pari a  ${}^B P = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ .

Ricordando che si ha  ${}^A P = {}^A_B R * {}^B P$  si ottiene:

$${}^A P = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 0,00 \\ 0,5 & 0,866 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,366 \\ 1,366 \\ 1,00 \end{Bmatrix}$$

Si voglia, per risolvere un problema inverso a quello presentato, trovare le coordinate rispetto al sistema B di un punto che abbia le coordinate  ${}^A P = \begin{Bmatrix} 0,366 \\ 1,366 \\ 1 \end{Bmatrix}$ . Per risolvere questo problema occorre calcolare la matrice di rotazione  ${}^B_A R$  in quanto  ${}^B P = {}^B_A R * {}^A P$ . Ricordando che le matrici di rotazione sono caratterizzate dalla proprietà che la loro inversa coincide con la trasposta si ha :

$${}^B P = \begin{bmatrix} 0,866 & 0,5 & 0,00 \\ -0,5 & 0,866 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,366 \\ 1,366 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

3. *Le matrici come operatori di rotazione*. Se abbiamo un punto appartenente ad un sistema mobile il prodotto  $R * P$  darà le nuove coordinate del punto P dopo la rotazione

rappresentata da  $\mathbf{R}$ . Si consideri, ad esempio, una matrice di rotazione che rappresenta una rotazione intorno all'asse Z di  $30^\circ$ :

$$\mathbf{R}_{Z,30} = \begin{bmatrix} C30 & -S30 & 0,00 \\ S30 & C30 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix}. \text{ Se, a titolo d'esempio, } \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \text{ il nuovo vettore di}$$

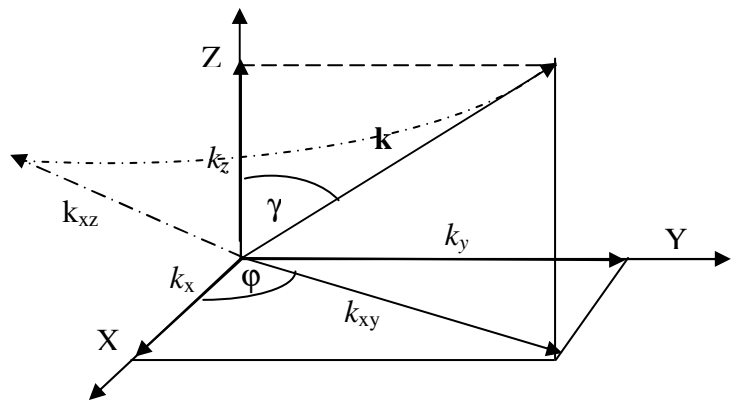
coordinate di  $\mathbf{P}$  dopo la rotazione è:

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} 0,867 & -0,5 & 0,00 \\ 0,5 & 0,867 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,367 \\ 1,367 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Quindi l'operatore  $\mathbf{R}$  trasforma le coordinate del punto  $\mathbf{P}$  in quelle del punto  $\mathbf{P}'$ , posizione del punto dopo la rotazione.

### 1.7 Rotazione del sistema mobile rispetto ad un asse qualsiasi.

Quando il sistema di riferimento mobile ruota di un angolo finito  $\theta$  intorno ad un generico asse  $\mathbf{k}$ , per definire la rotazione bastano quattro parametri, il valore dell'angolo  $\theta$  e le tre componenti del vettore  $\mathbf{k}$ . Se il vettore  $\mathbf{k}$  ha modulo unitario due sue componenti e l'angolo  $\theta$  potrebbero bastare. La rappresentazione più comune di una rotazione intorno ad un asse generico si ha utilizzando le tre componenti di  $\mathbf{k}$ , moltiplicate per il valore dell'angolo  $\theta$ . In questo modo tre componenti sono sufficienti per rappresentare una rotazione finita. Mostriamo ora come si passa da una rappresentazione asse-angolo ad una matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  tradizionale. Con riferimento alla figura, si operano alcune rotazioni tendenti a far coincidere l'asse  $\mathbf{k}$  con uno degli assi coordinati.



1. S'inizia a ruotare il vettore  $\mathbf{k}$  intorno all'asse Z sino a quando giaccia sul piano X-Z. La rotazione richiesta è dell'angolo  $-\varphi$  (negativo perché si tratta di una rotazione in senso orario) intorno a Z, osservando che:

$$\cos \varphi = \frac{k_x}{k_{xy}} \quad \sin \varphi = \frac{k_y}{k_{xy}}$$

$$\text{con } k_{xy} = \sqrt{(k_x^2 + k_y^2)}$$

ricordando che  $\mathbf{k}$  è un vettore unitario. La matrice di rotazione corrispondente è:

$$\mathbf{R}_{Z,\varphi} = \begin{bmatrix} c\varphi & s\varphi & 0 \\ -s\varphi & c\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x/k_{xy} & k_y/k_{xy} & 0 \\ -k_y/k_{xy} & k_x/k_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.1)$$

2. Si faccia ora ruotare il vettore così ottenuto, che chiameremo  $k_{xz}$ , intorno all'asse Y, dell'angolo  $-\gamma$ . Si tratta, anche in questo caso, di una rotazione oraria che porterà  $k_{xz}$  a coincidere con l'asse Z. La corrispondente matrice di rotazione sarà:

$$\mathbf{R}_{Y,-\gamma} = \begin{bmatrix} c\gamma & 0 & -s\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ s\gamma & 0 & c\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_z & 0 & -k_{xy} \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{xy} & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (1.7.2)$$

3. Avendo portato con la sequenza di rotazioni precedenti l'asse  $\mathbf{k}$  a coincidere con Z si compia ora una rotazione di  $\theta$  intorno all'asse fisso Z. La corrispondente matrice di rotazione è:

$$\mathbf{R}_{Z,\vartheta} = \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.3)$$

4. Si riporti ora l'asse  $\mathbf{k}$  nella sua posizione originaria con una rotazione intorno a Y dell'angolo  $\gamma$ , che compenserà quella precedente di  $-\gamma$ , e una rotazione intorno a Z di  $\varphi$  che compensa quella opposta precedente.

Con l'intera successione di rotazioni non abbiamo fatto altro che portare l'asse  $\mathbf{k}$  a coincidere con uno degli assi coordinati, nel nostro caso Z, operare la rotazione  $\theta$  e quindi riportarlo nella posizione primitiva. La matrice della rotazione complessiva si ottiene moltiplicando le varie matrici elementari indicate prima, ricordando che si tratta di rotazioni intorno ad assi fissi, quindi è necessario premoltiplicare, ottenendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{k,\vartheta} &= \mathbf{R}_{Z,\varphi} * \mathbf{R}_{Y,\gamma} * \mathbf{R}_{k,\vartheta} * \mathbf{R}_{Y,-\gamma} * \mathbf{R}_{Z,-\varphi} = \\ &= \begin{bmatrix} k_x/k_{xy} & -k_y/k_{xy} & 0 \\ k_y/k_{xy} & k_x/k_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_z & 0 & k_{xy} \\ 0 & 1 & 0 \\ -k_{xy} & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_z & 0 & -k_{xy} \\ 0 & 1 & 0 \\ k_{xy} & 0 & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x/k_{xy} & k_y/k_{xy} & 0 \\ -k_y/k_{xy} & k_x/k_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} k_x^2 v\vartheta + c\vartheta & k_x k_y v\vartheta - k_z s\vartheta & k_x k_z v\vartheta + k_y s\vartheta \\ k_x k_y v\vartheta + k_z s\vartheta & k_y^2 v\vartheta + c\vartheta & k_y k_z v\vartheta - k_x s\vartheta \\ k_x k_z v\vartheta - k_y s\vartheta & k_y k_z v\vartheta + k_x s\vartheta & k_z^2 v\vartheta + c\vartheta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{con } v\vartheta = 1 - \cos \vartheta \quad (1.7.4)$$

La relazione scritta permette di passare dalla rappresentazione asse-angolo di una rotazione, costituita da uno pseudo vettore avente nelle prime tre posizioni le componenti del versore che

rappresenta l'asse di rotazione e nell'ultima il valore della rotazione,  $\left\{ \begin{matrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ \vartheta \end{matrix} \right\}$ , alla rappresentazione

secondo una matrice di rotazione. Non è difficile scrivere le relazioni che permettono il passaggio inverso, dalla rappresentazione secondo una matrice di rotazione alla rappresentazione asse-angolo. Si supponga ora che la rotazione  $\vartheta = \Delta\vartheta$  sia infinitesima, per cui si possa assumere che  $\cos \Delta\vartheta \sim 1$   $\sin \Delta\vartheta = \Delta\vartheta$ . La matrice precedente, dopo le opportune semplificazioni diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -k_z \Delta\vartheta & k_y \Delta\vartheta \\ k_z \Delta\vartheta & 1 & k_x s\vartheta \\ -k_y \Delta\vartheta & k_x \Delta\vartheta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_z \vartheta & \Delta_y \vartheta \\ \Delta_z \vartheta & 1 & \Delta_x \vartheta \\ -\Delta_y \vartheta & \Delta_x \vartheta & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7.5)$$

è facile vedere che la matrice precedente è antisimmetrica. Le quantità che vi compaiono sono le componenti sui tre assi Cartesiani della rotazione elementare  $\Delta\theta$ . Se consideriamo un punto P, la cui posizione iniziale è rappresentata dal vettore  $\mathbf{OP} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$ , dopo la rotazione il punto si troverà in una

nuova posizione: 
$$\mathbf{OP}' = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_z\vartheta & \Delta_y\vartheta \\ \Delta_z\vartheta & 1 & \Delta_x\vartheta \\ -\Delta_y\vartheta & \Delta_x\vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1.7.6)$$

Lo spostamento infinitesimo del punto P dovuto alla rotazione è:

$$\begin{aligned} \mathbf{PP}' &= \mathbf{OP}' - \mathbf{OP} = \Delta\mathbf{P} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_z\vartheta & \Delta_y\vartheta \\ \Delta_z\vartheta & 1 & \Delta_x\vartheta \\ -\Delta_y\vartheta & \Delta_x\vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta_z\vartheta & \Delta_y\vartheta \\ \Delta_z\vartheta & 1 & \Delta_x\vartheta \\ -\Delta_y\vartheta & \Delta_x\vartheta & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \quad (1.7.7) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta_z\vartheta & \Delta_y\vartheta \\ \Delta_z\vartheta & 0 & \Delta_x\vartheta \\ -\Delta_y\vartheta & \Delta_x\vartheta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_x\vartheta \\ \Delta_y\vartheta \\ \Delta_z\vartheta \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

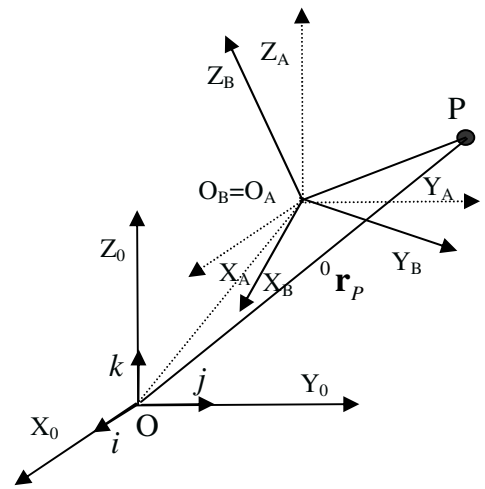
Se ora supponiamo che la rotazione infinitesima  $\Delta\theta$  avvenga in un intervallo di tempo infinitesimo  $\Delta t$ , si ha:

$$\mathbf{v}_P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta t} = \begin{Bmatrix} \Delta_x\vartheta / \Delta t \\ \Delta_y\vartheta / \Delta t \\ \Delta_z\vartheta / \Delta t \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (1.7.8)$$

nella rotazione infinitesima intorno ad un asse qualunque si definisce la velocità angolare come un vettore diretto secondo l'asse di rotazione e di modulo pari a  $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ . Le componenti del vettore  $\boldsymbol{\omega}$  sugli assi coordinati si ottengono per proiezione, come di consueto.

### 1.8 Trasformazioni di traslazione e rotazione.

Quando un sistema di coordinate è traslato, rispetto ad un sistema fisso le coordinate di tutti i punti solidali al sistema mobile vengono ad incrementarsi dell'entità della traslazione, pari allo spostamento dell'origine del sistema. Nella figura, dopo la traslazione il sistema mobile viene a trovarsi nella posizione (A). Le coordinate di un punto solidale ad (A) diventano dopo la traslazione:



$${}^0\mathbf{r}_P = {}^0\mathbf{R}^A \mathbf{r}_P + \mathbf{OO}_A = \mathbf{I}^* \left\{ \begin{Bmatrix} {}^A x_P \\ {}^A y_P \\ {}^A z_P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^0 x_{O_A} \\ {}^0 y_{O_A} \\ {}^0 z_{O_A} \end{Bmatrix} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^0 x_{O_A} + {}^A x_P \\ {}^0 y_{O_A} + {}^A y_P \\ {}^0 z_{O_A} + {}^A z_P \end{Bmatrix} \quad (1.8.1)$$



La matrice  ${}^A_B\mathbf{R}$  coincide con la matrice identità in quanto la trasformazione operata non comporta una rotazione relativa tra i due sistemi.

Se dopo la traslazione il sistema (A) ruota sino a raggiungere la configurazione indicata con (B), le nuove coordinate assolute del punto P saranno:

$${}^0\mathbf{r}_P = {}^A_B\mathbf{R} {}^B\mathbf{r}_P + \mathbf{OO}_A = {}^A_B\mathbf{R} \begin{Bmatrix} {}^A x_P \\ {}^A y_P \\ {}^A z_P \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} {}^0 x_{O_A} \\ {}^0 y_{O_A} \\ {}^0 z_{O_A} \end{Bmatrix} \quad (1.8.2)$$

l'espressione precedente è equivalente a:

$${}^0\mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} {}^A_B r_{11} & {}^A_B r_{12} & {}^A_B r_{13} & {}^0 x_{O_A} \\ {}^A_B r_{11} & {}^A_B r_{11} & {}^A_B r_{11} & {}^0 y_{O_A} \\ {}^A_B r_{11} & {}^A_B r_{11} & {}^A_B r_{11} & {}^0 z_{O_A} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}^B x_P \\ {}^B y_P \\ {}^B z_P \\ 1 \end{Bmatrix} = {}^0_B\mathbf{T}^B \mathbf{r}_P \quad (1.8.3)$$

Con l'unica differenza che la matrice di trasformazione è rispetto alle matrici di rotazione viste in precedenza di ordine 4. La matrice di rototraslazione così costruita tiene conto della traslazione e della rotazione avvenute nel passare dal sistema (0) al sistema (B) attraverso la posizione (A). Per usare queste matrici i vettori posizione dei punti dovranno essere espressi in coordinate omogenee, rappresentate da un vettore di 4 componenti invece che delle solite tre. La quarta componente è un fattore di scala, usato nelle trasformazioni prospettiche, che assumeremo sempre eguale all'unità. Una pura traslazione dell'origine del sistema mobile rispetto al sistema fisso viene rappresentata da una matrice di trasformazione 4\*4 che contiene nelle prime tre righe e tre colonne l'usuale matrice dei coseni direttori, che si riduce ad una matrice identità, nell'ultima colonna le coordinate dell'origine del sistema mobile rispetto al sistema fisso.

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{o'} \\ 0 & 1 & 0 & y_{o'} \\ 0 & 0 & 1 & z_{o'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.8.4)$$

### Esempio

Due sistemi di coordinate sono inizialmente coincidenti, poi uno dei due è traslato secondo il

vettore  $\begin{Bmatrix} 1.5 \\ 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$ . In seguito, il sistema mobile ruota rispetto all'asse x fisso, dell'angolo  $\alpha$ , quindi

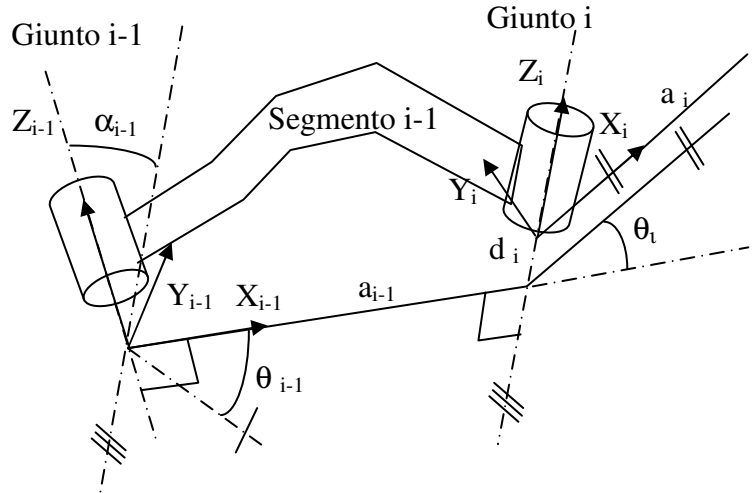
intorno all'asse y' ruotato dell'angolo  $\beta$ . Si trovi la matrice di trasformazione:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ a_{31} & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{o'} \\ 0 & 1 & 0 & y_{o'} \\ 0 & 0 & 1 & z_{o'} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 1.9 Sistemi multicorpo. Scelta dei sistemi di riferimento.

La scelta dei sistemi di coordinate è arbitraria, ma l'impiego di procedure standard semplifica i calcoli e rende i modelli più facili da trattare. Accenneremo ad una convenzione, dovuta a Denavit e Hartenberg [1]. La convenzione è valida per qualunque tipo di sistema articolato. Essa permette, come vedremo, di descrivere la posizione e l'orientamento di ciascun sistema di riferimento con soli quattro parametri:

- Si assuma un sistema inerziale di base (0) posizionato nel modo più opportuno per il problema da analizzare. Il sistema di base non si muove in quanto è collegato alla parte statica del sistema.
- Si attribuisca una numerazione progressiva ai segmenti del sistema. Nei sistemi articolati seriali ogni segmento è collegato al precedente e al successivo mediante due giunti.
- Si associ poi ad ogni segmento del sistema un sistema di coordinate ad esso solidale, scelto nel modo seguente:
- L'asse  $Z_i$  del sistema di riferimento (i), solidale al segmento con lo stesso numero, sarà diretto come l'asse del giunto i-esimo. Nella maggioranza dei casi i giunti sono rotoidali per cui l'asse  $Z$  è posizionato sull'asse di rotazione del giunto. Si individui la perpendicolare comune  $a_i$  agli assi  $Z_i$  e  $Z_{i+1}$ . E' buona norma far coincidere l'asse  $Z_0$  con l'asse  $Z_1$  per cui, quando la rotazione del giunto 1 è nulla, i due sistemi di riferimento (0) e (1) coincidano..
- Si ponga l'origine del sistema (i) nell'intersezione tra  $a_i$  e  $Z_i$ .
- Si ponga l'asse  $X_i$  lungo  $a_i$ . Se i due assi  $Z_i$  e  $Z_{i+1}$  si intersecano si assegni  $X_i$  perpendicolare al piano dei due assi  $Z$  e passante dalla loro intersezione.
- Si scelga l'asse  $Y_i$  normale agli altri assi dello stesso sistema (i), già definiti con verso tale da formare una terna destra con i primi due.
- Per l'ultimo giunto si adotta una direzione dell'asse  $X_n$  coincidente con  $X_{n-1}$  quando la rotazione del giunto n è nulla.



Se la convenzione di Denavit-Hartenberg viene osservata, per ogni segmento vengono individuati quattro parametri, definiti nel modo seguente:

- $a_{i-1}$  la distanza tra  $Z_{i-1}$  e  $Z_i$  misurata lungo  $X_{i-1}$
- $\alpha_{i-1}$  l'angolo da  $Z_{i-1}$  a  $Z_i$  misurato intorno a  $X_{i-1}$
- $d_i$  la distanza tra  $X_{i-1}$  e  $X_i$  misurata lungo  $Z_i$
- $\theta_i$  l'angolo da  $X_{i-1}$  a  $X_i$  misurato intorno  $Z_i$

La convenzione presentata non porta ad una scelta unica dei sistemi di riferimento. Quando si individuano all'inizio gli assi dei giunti dobbiamo scegliere arbitrariamente il verso degli assi  $Z_i$  in quanto sono possibili due scelte. Nel caso in cui due assi  $Z$  consecutivi si intersechino il verso dell'asse  $X$  presenta due alternative. Infine quando gli assi  $Z_i$   $Z_{i+1}$  sono paralleli la posizione dell'origine per il sistema (i) è indeterminata. In questo caso la scelta dell'origine viene compiuta generalmente in modo da rendere  $d_i$  nullo.

Giunti sferici. Nel caso esistano nel sistema giunti sferici che permettano rotazioni intorno a tre assi ortogonali si creano dei segmenti artificiali di lunghezza nulla e a ciascun segmento si associa un sistema di riferimento con un grado di libertà unico.

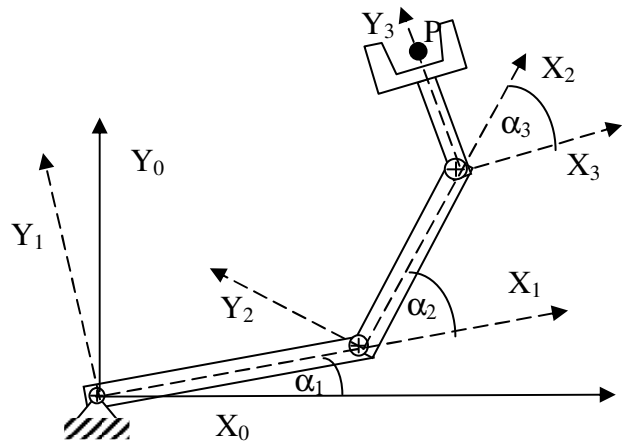
Con riferimento alla figura precedente la generica matrice di trasformazione tra due sistemi successivi (i-1), (i) comporta una rotazione del sistema (i) rispetto a (i-1) intorno all'asse  $X_{i-1}$ , uno spostamento dell'origine del sistema i secondo l'asse  $X_{i-1}$  fisso della quantità  $a_{i-1}$ , seguita una rotazione di  $\theta_i$  intorno a  $Z_i$  e da una traslazione lungo l'asse  $Z_i$  mobile di  $d_i$ . Trattandosi di rotazioni intorno ad assi mobili la matrice di trasformazione complessiva si ottiene posmultiplicando nell'ordine le matrici elementari corrispondenti alle trasformazioni descritte. Si ottiene quindi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_{i-1} & s\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & 0 \\ s\vartheta_i & c\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\vartheta_i & -s\vartheta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\vartheta_i & c\alpha_{i-1}c\vartheta_i & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\alpha_{i-1}s\vartheta_i & s\alpha_{i-1}c\vartheta_i & c\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9.1)$$

Esempio:

La figura illustra un sistema articolato, vagamente somigliante a un arto umano superiore. Le semplificazioni fatte assumono che il movimento del braccio avvenga nel piano e che le articolazioni siano rappresentate da giunti rotoidali.

Nel caso del braccio presentato la scelta dei sistemi di riferimento è particolarmente facile. Gli assi dei giunti sono tutti paralleli e normali al piano del moto. Gli assi  $Z_i$  sono stati assunti con il verso dal piano del moto verso l'osservatore. Gli assi X corrono lungo l'asse dei singoli segmenti, mentre gli assi Y formano con i precedenti delle terne destre.



Si supponga che le coordinate del punto P siano date con riferimento al sistema di coordinate  $X_3, Y_3$ , solidale all'ultima sezione del sistema. Possiamo osservare che il punto P, coincidente ad esempio con un punto della mano è fermo rispetto al sistema di riferimento 3 mentre si muove rispetto agli altri sistemi. Nel caso in cui il modello presentato venga utilizzato per analisi di biomeccanica è possibile utilizzarlo per analisi di posizione, ad esempio nel tracciamento della traiettoria del punto P quando i primi segmenti del braccio compiono una certa escursione angolare. Questo è un tipico caso di cinematica diretta, nel quale la traiettoria del punto P viene desunta con operazioni matriciali dalla legge di rotazione dei tre segmenti. La determinazione delle traiettorie di punti del sistema in funzione del tempo o dell'angolo di rotazione dei segmenti riveste una certa importanza per la biomeccanica, ad esempio nella progettazione dei tutori per la rieducazione motoria. In questo caso il tutore è costituito da un sistema cinematico attuato da motori elettrici o pneumatici che viene applicato all'arto da rieducare.

Di analoga importanza è la cinematica inversa che parte dalla conoscenza della posizione del punto P o di un'intera traiettoria per determinare la legge di movimento dei segmenti che compongono il

Di analoga importanza è la cinematica inversa che parte dalla conoscenza della posizione del punto P o di un'intera traiettoria per determinare la legge di movimento dei segmenti che compongono il

sistema. In questo caso si cerca di stabilire, registrando una traiettoria con telecamere o altri sistemi, se questa indica la presenza di eventuali patologie o disfunzioni. I metodi per la soluzione di problemi di cinematica inversa vengono soltanto accennati nel seguito. Si rimanda a testi avanzati di robotica e biomeccanica.

Vogliamo affrontare il problema della determinazione del vettore delle coordinate di P rispetto a qualunque altro sistema di riferimento mobile o fisso. Sia il vettore che rappresenta in coordinate

omogenee la posizione di P rispetto al sistema 3  ${}^3\mathbf{r}_P = \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix}$ . Se si desidera ottenere il vettore che

rappresenta la posizione di P rispetto al sistema 2, occorre tener presente che il sistema 2 deve essere considerato “fisso” rispetto al sistema 3. Si ha quindi:

$${}^2\mathbf{r}_P = {}^2_3\mathbf{T} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha_3 & -s\alpha_3 & 0 & l_2 \\ s\alpha_3 & c\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.9.2)$$

Seguendo la stessa procedura possiamo calcolare il vettore posizione del punto P rispetto al sistema 1 e rispetto al sistema base 0.

$${}^1\mathbf{r}_P = {}^1_2\mathbf{T} \begin{Bmatrix} x_P^2 \\ y_P^2 \\ z_P^2 \\ 1 \end{Bmatrix} = {}^1_2\mathbf{T} * {}^2_3\mathbf{T} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha_2 & -s\alpha_2 & 0 & l_1 \\ s\alpha_2 & c\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha_3 & -s\alpha_3 & 0 & l_2 \\ s\alpha_3 & c\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.9.3)$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{r}_P &= {}^0_1\mathbf{T} \begin{Bmatrix} x_P^1 \\ y_P^1 \\ z_P^1 \\ 1 \end{Bmatrix} = {}^0_1\mathbf{T} * {}^1_2\mathbf{T} * {}^2_3\mathbf{T} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha_1 & -s\alpha_1 & 0 & 0 \\ s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha_2 & -s\alpha_2 & 0 & l_1 \\ s\alpha_2 & c\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha_3 & -s\alpha_3 & 0 & l_2 \\ s\alpha_3 & c\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} c\alpha_{123} & -s\alpha_{123} & 0 & l_1c\alpha_1 + l_2c\alpha_{12} \\ s\alpha_{123} & c\alpha_{123} & 0 & l_1s\alpha_1 + l_2s\alpha_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_P^3 \\ y_P^3 \\ z_P^3 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (1.9.4)$$

In cui  $\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $\alpha_{123} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Il risultato ottenuto mostra che per sistemi piani e ad assi paralleli la matrice di trasformazione è particolarmente semplice ed intuitiva. Infatti la posizione angolare del terzo segmento è dovuta alle rotazioni dei segmenti precedenti e dello stesso terzo segmento. La posizione dell'origine è facilmente calcolabile per ispezione geometrica. È opportuno ricordare che gli angoli hanno un segno dipendente dalle convenzioni adottate, nel nostro caso positivi se la rotazione è antioraria, negativi in caso contrario.

*Inversa di una matrice di trasformazione.* Data la matrice  ${}^A_B\mathbf{T}$  che mette in relazione i sistemi di coordinate B ed A si vuole trovare  ${}^B_A\mathbf{T}$ . Osservando che la matrice  ${}^A_B\mathbf{T}$  è composta da una

sottomatrice  $3 \times 3$   ${}^A_B \mathbf{R}$  che rappresenta l'orientamento angolare di B rispetto ad A e nella quarta colonna da un vettore  ${}^A \mathbf{O}_B$  che rappresenta la posizione dell'origine di B rispetto ad A si ha :

$${}^A_B \mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B \mathbf{R}, & {}^A \mathbf{O}_B \end{bmatrix} \quad (1.9.5)$$

Per quanto riguarda l'orientamento si ha intuitivamente  ${}^B_A \mathbf{R} = {}^A_B \mathbf{R}^{-1} = {}^A_B \mathbf{R}^T$  mentre la posizione dell'origine di A rispetto a B sarà eguale alla posizione dell'origine di B rispetto ad A col segno cambiato ed espressa nel sistema B, cioè:

$${}^B \mathbf{A}_{ORG} = -{}^B_A \mathbf{R} * {}^A \mathbf{O}_B \quad \text{quindi, in conclusione} \quad {}^B_A \mathbf{T} = \begin{bmatrix} {}^A_B \mathbf{R}^T, & -{}^A_B \mathbf{R}^T {}^A \mathbf{O}_B \end{bmatrix}. \quad (1.9.6)$$

### 1.10 Gradi di libertà nella biomeccanica del corpo umano. Le articolazioni.

Ricordando che un corpo rigido nello spazio possiede tre gradi di libertà di traslazione e tre di rotazione e nel piano due di traslazione e uno di rotazione possiamo impostare un modello del corpo umano basato sulle seguenti assunzioni :

- Ogni segmento che compone il sistema sia un corpo rigido collegato ai segmenti contigui attraverso giunti di rotazione, le articolazioni.
- La configurazione del corpo sia definibile attraverso un numero finito di parametri, le rotazioni in corrispondenza delle articolazioni.
- Le caratteristiche d'inerzia dei vari segmenti siano calcolabili ricorrendo ad opportune ipotesi semplificative, quale quella dell'omogeneità.
- Il sistema, soggetto a forze esterne come quelle di gravità e quelle dovute all'ambiente circostante, viene controllato nel movimento e nella stabilità da un numero finito di azioni muscolari applicate in corrispondenza di punti definiti dei vari segmenti.

Ricorderemo i principali tipi di articolazioni, ricorrendo alle definizioni della medicina, importanti e necessarie per una trattazione interdisciplinare dei problemi. Le articolazioni sono giunti tra capi ossei interconnessi mediante tessuti connettivi. Possono essere di tipo mobile (ad esempio la spalla), semimobile (fra le vertebre), o fisso (fra le ossa del cranio). Si dividono in **sinartrosi e diartrosi**.

#### **Sinartrosi**

Le sinartrosi sono dispositivi giunzionali tra due capi ossei contigui. Possono essere suddivise in tre sottocategorie rispetto al tessuto connettivo che si infrappone tra gli stessi capi ossei in sinfibrosi, sincondrosi e sinfisi.

**Nelle sinfibrosi, o articolazioni fibrose**, il tessuto di congiunzione è prevalentemente costituito da connettivo ricco di collagene, e in alcuni casi abbondante in fibre elastiche. Si distinguono all'interno delle articolazioni fibrose tre diverse categorie: suture, gonfosi e sindesmosi.

#### **Suture**

Le **suture** presentano tessuto connettivo denso che costituisce la membrana di sutura, o legamento di sutura, e si verificano tra le ossa del cranio, per lo più tra ossa piatte. La membrana di sutura presenta regioni differenziate al fine di permettere l'accrescimento osseo, le superfici di sutura delle ossa che si affrontano nella sutura sono invece rivestite da un sottile strato di cellule osteogenitiche in continuità con il periostio. In alcune suture il tessuto connettivo si ossifica con il tempo, in questo caso la sutura diventa una sinostosi.

Le suture possono essere, in base alla forma delle superfici che si affrontano, distinte in:

**Seghettata** - caratterizzata da margini ossei che posseggono sporgenze e rientranze che si incastrano tra loro

*Dentata* - caratterizzata da margini ossei con sporgenze più fini rispetto a quelle della sutura seghettata e che spesso si espandono verso l'estremità libera

*Armonica* - caratterizzata da margini ossei lisci

*Squamosa* - caratterizzata da margini ossei tagliati a sbieco

*Limbica* - caratterizzata da margini ossei tagliati a sbieco e reciprocamente seghettate

*Schindilesi* - caratterizzata dalla cresta di osso che si adatta al solco di un osso adiacente

### *Gonfosi*

Le *gonfosi*, o *articolazioni a piolo-alveolo* o *alveolodentarie*, sono un tipo di articolazioni fibrose caratteristiche per la fissazione dei denti nelle proprie cavità alveolari. La fissazione avviene grazie al collagene del peridonzio che connette il cemento del dente all'osso mandibolare o mascellare.

### *Sindesmosi*

Le *sindesmosi* sono articolazioni fibrose in cui il mezzo congiungente le due ossa che vanno ad articolarsi è un legamento interosseo, una sottile corda fibrosa o una membrana aponevrotica. Esempio ne è l'articolazione radio-ulnare media.

### *Sincondrosi*

Le *sincondrosi* sono caratterizzate dalla presenza, di un sottile strato di cartilagine che può, col tempo, essere sostituito da tessuto osseo, determinando la trasformazione della sincondrosi in sinostosi. Classi esempi di sincondrosi sono l'articolazione sterno-costale della prima costa e le varie articolazioni che si instaurano durante lo sviluppo di ossa lunghe tra epifisi e diafisi.

### *Sinfisi*

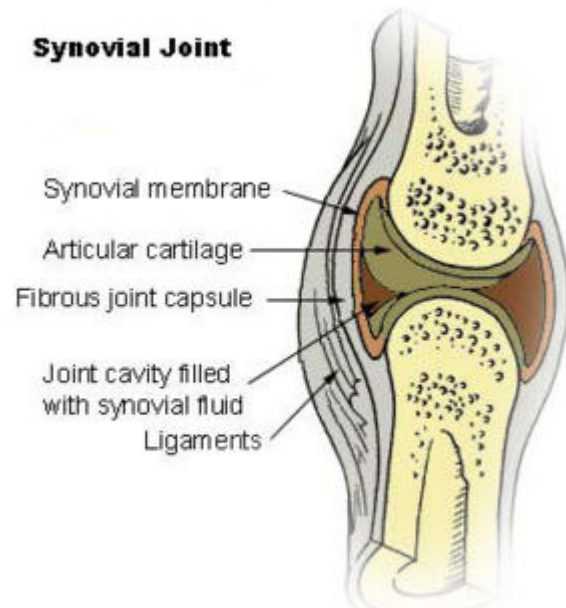
Le *sinfisi* presentano un disco fibrocartilagineo di connessione, le superfici articolari delle ossa a contatto con il disco fibrocartilagineo della sinfisi sono rivestite da cartilagine ialina. Esempi sono la sinfisi pubica, l'articolazione tra i corpi delle vertebre e quella tra il manubrio e il corpo dello sterno. La maggior parte delle sinfisi non va incontro a sinostosi, sussistono tuttavia alcune eccezioni.

Le sinartrosi non rivestono una grande importanza nell'analisi del movimento in quanto dotate in genere di scarsa mobilità. Le figure che seguono sono tratte da Wikipedia.

### *Diartrrosi*

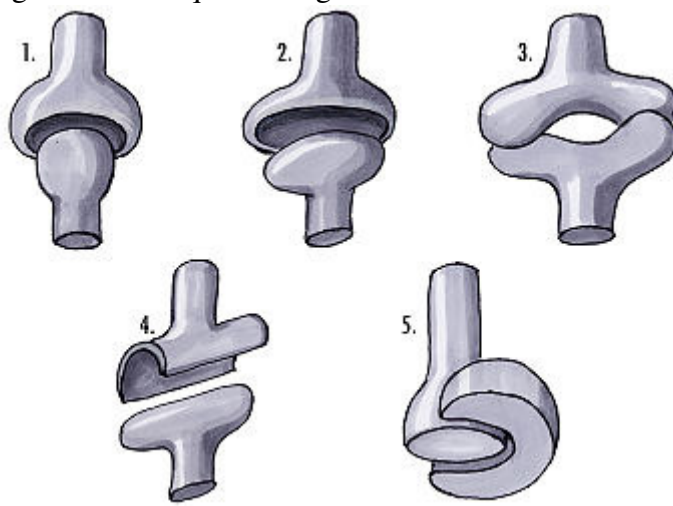
Le diartrosi sono dispositivi giunzionali tra due capi ossei contigui. Questo tipo di articolazione permette un certo grado di mobilità alle ossa affrontate. Nelle diartrosi i capi ossei sono rivestiti da cartilagine ialina la quale svolge una funzione motoria di compressibilità ed elasticità. La cartilagine consta di tre strati di collagene (profondo, intermedio e superficiale).

### Synovial Joint



Articolazione sinoviale (diartrosi)

Le diartrosi possono, inoltre, essere armoniche, con capi ossei corrispondenti, e disarmoniche; in tal caso le discordanze sono eliminate tramite i menischi fibrocartilaginei. Questi permettono scambi nutritivi e una maggiore sollecitazione



meccanica. Esternamente la capsula articolare, un manicotto fibroso, ricopre l'intera articolazione, fissandosi ai margini della cartilagine. Profondamente ad essa si trova la membrana sinoviale che può essere: semplice se ridotta ad un esile strato fibroso o complessa se spessa e ricca di cellule, vasi e nervi. L'articolazione è costituita anche da legamenti a distanza o periferici. Infine la cavità articolare è lo spazio presente tra i capi ossei e la capsula articolare ripieno di liquido sinoviale proveniente dal plasma sanguigno e arricchito con sostanze nutritive; attenua gli urti.

Con riferimento alla figura le **diartrosi** possono essere classificate come :

#### *Artrodie*

Le due superfici articolari sono piane e consentono solo movimenti di scivolamento dei due capi articolari, un esempio sono quelle tra i processi articolari delle vertebre.

#### *Enartrosi (1)*

I due capi ossei sono "sferici", uno concavo e l'altro convesso e compiono movimenti angolari su tutti i piani, inclusa la rotazione. Un esempio è l'articolazione coxo-femorale (articolazione dell'anca) che permette tre rotazioni intorno a tre assi ortogonali.

#### *Condiloartrosi (2)*

I due capi ossei sono ellissoidali uno concavo (cavità glenoidea) e l'altro convesso (condilo) e permettono un movimento angolare intorno a due assi ortogonali. Un tipico esempio è l'articolazione temporo-mandibolare. Per precisione l'articolazione temporo-mandibolare è una diartrosi doppia formata da due articolazioni sovrapposte con interposto un disco completo che le separa. Sono una superiore (articolazione disco-fossa glenoidea) e una inferiore (articolazione disco-condilo).

#### *A sella (3)*

I due corpi sono biassiali concavi e convessi a incastro reciproco e permettono una rotazione assiale. Si chiamano così perché le superfici articolari hanno la forma di una sella di cavallo concava longitudinalmente e convessa trasversalmente, come per esempio l'articolazione tra metacarpo e falangi. Permettono due rotazioni intorno ad assi ortogonali.

#### *Ginglino laterale o trocoide(4)*

I due capi ossei sono cilindri, uno cavo e uno pieno, con l'asse del corpo parallelo all'asse longitudinale delle ossa. Il movimento è rotatorio, per esempio l'articolazione prossimale tra radio e ulna.

#### *Ginglino angolare o troclea(5)*

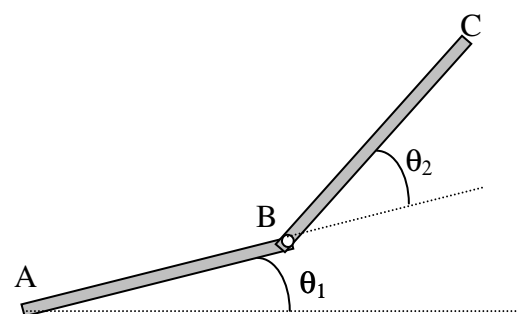
I due corpi ossei sono cilindri con l'asse del cilindro perpendicolare all'asse del capo longitudinale delle ossa. Il movimento è angolare ad esempio l'articolazione del gomito.

Sempre con riferimento al linguaggio della medicina si deve notare che il tipo di movimento non è mai riferito al segmento mobile, ma all'articolazione, si dirà quindi flessione dell'anca e non flessione del femore o della gamba, rotazione della spalla e non dell'omero. L'allontanamento dell'arto superiore dall'asse di simmetria del corpo sul piano frontale verrà chiamato abduzione della spalla e non del braccio.

Nel corpo le ossa possono avere una disposizione in serie, in parallelo o in gruppo. Nel primo caso in biomeccanica si parla di una catena cinematica. È il caso degli arti inferiori e superiori.

### *1.11 Movimenti elementari nella biomeccanica del corpo umano*

Molti sistemi non sono composti da un unico corpo rigido, ma da più corpi connessi attraverso collegamenti, che chiameremo giunti. La configurazione di un sistema è descritta da una serie di parametri indipendenti (possono essere ad esempio un certo numero di coordinate Cartesiane) che ne definiscono completamente la posizione. Se il sistema è costituito da un certo numero di corpi liberi, non mutuamente vincolati, il numero di gradi di libertà del sistema è semplicemente pari al



numero dei corpi per il numero di gradi di libertà di un singolo corpo, tre per il moto piano, sei per il moto spaziale. Se due corpi sono collegati da un giunto che annulla un certo numero di movimenti elementari nel moto relativo dei due corpi, il numero di gradi di libertà del sistema completo è pari a quello originario, meno il numero di movimenti elementari relativi eliminati dai vincoli. Se un giunto collega più di due corpi il numero di gradi di libertà che esso sottrae si ottiene, considerando tutte le possibili coppie d'elementi che concorrono in quel giunto, meno una. Se ad esempio un giunto sferico collega tre elementi, il numero di gradi di libertà che esso cancella risulta pari a 6. Il sistema complessivo ne mantiene 12.

Con riferimento alle articolazioni della figura precedente un' enartrosi toglie tre gradi di libertà nel moto relativo dei due segmenti che collega, lasciandone tre, le tre rotazioni, un' articolazione a ginglino angolare o laterale ne toglie cinque lasciando solo la possibilità di una rotazione, un' articolazione condiloidea o a sella lascia libere due rotazioni cancellando quattro gradi di libertà. Avremo quindi:

$$NGL = 6 * NB - 3 * NEN - 4 * NCOND - 5 * NGING \quad (1.11.1)$$

Nella formula precedente NGL è il numero di gradi di libertà del sistema, NEN il numero di enartrosi, NCOND quello di articolazioni condiloidee o a sella, NGING il numero di articolazioni a ginglino.

Un esempio importante di sistemi articolati spaziali è quello delle articolazioni degli arti superiori e inferiori del corpo umano e del rachide spinale. Si tratta in genere di giunti rotoidali ( l' articolazione dell' anca è, come abbiamo accennato un vincolo sferico, poiché la testa del femore, di forma sferica, si accoppia alla cavità dell' acetabolo, anch' essa della stessa forma. Ambedue gli elementi sferici sono rivestiti da un materiale elastico e relativamente deformabile, la cartilagine, che ha lo scopo di attenuare le punte di sollecitazione dovute al trasferimento dei carichi dall' arto al tronco, attraverso il bacino. Se le superfici della testa del femore e dell' acetabolo a contatto strisciassero l' una sull' altra senza alcun lubrificante, si avrebbe una rapida usura delle superfici stesse, con conseguente danno funzionale nell' articolazione. In effetti, le superfici sono lubrificate dal liquido sinoviale che abbassa fortemente il coefficiente d' attrito tra gli elementi a contatto e minimizza il calore prodotto per attrito durante il funzionamento dell' articolazione.

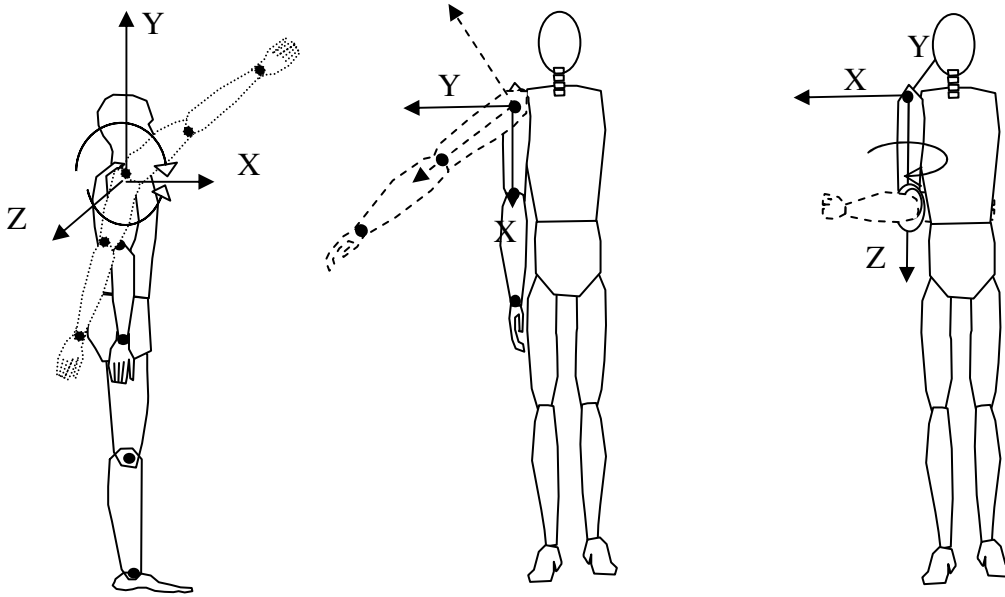
Nel caso di moti riconducibili al caso piano in cui le articolazioni si riducano a cerniere piane la formula da applicare è la seguente:

$$NGL = 3 * NB - 2 * NCN \quad (1.11.2)$$

Dove con NCN si è indicato il numero di cerniere piane, di qualunque tipo di articolazione esse siano la semplificazione. E' opportuno notare che ricondurre il funzionamento di un' articolazione a un modello geometricamente perfetto è una forte semplificazione. Nel ginocchio ad esempio l' asse della rotazione relativa della gamba rispetto al femore non è fisso ma dipendente dall' angolo di rotazione.

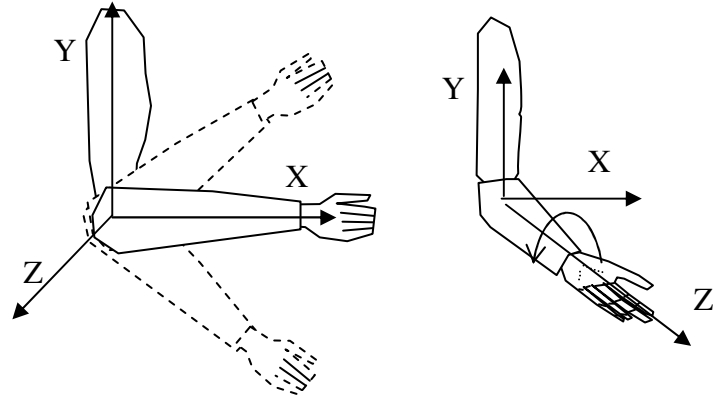
*I tre gradi di libertà della spalla. Flessione-estensione, abduzione-adduzione, rotazione intorno all' asse dell' omero*





Occorre comunque notare che esistono altre due possibilità di movimento della spalla, il sollevamento-abbassamento e l'avanzamento-arretramento che operano sulla scapola variando la posizione dell'articolazione.

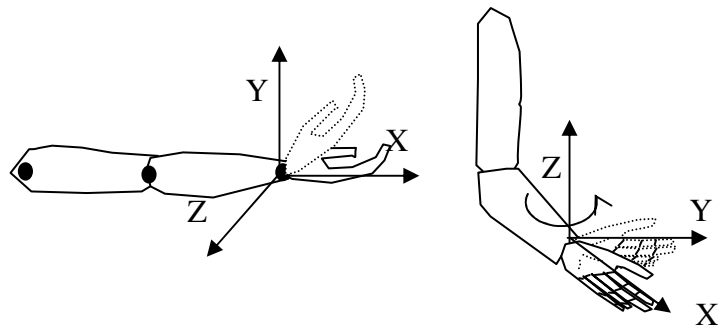
*I due gradi di libertà del gomito.*  
 Flessione-estensione e rotazione intorno al suo asse (movimento di supinazione-pronazione dell'avambraccio).



*I due gradi di libertà del polso.* Flessione-estensione e abduzione radio-ulnare.

La mano è un organo costituito da gruppi di ossa disposti in serie e in parallelo. Trascuriamo la mobilità delle articolazioni tra carpo e metacarpo, ad eccezione del pollice la cui articolazione tra carpo e metacarpo è una condiloartrosi che permette due gradi di libertà, flessione-estensione e adduzione-abduzione.

Questo movimento del pollice permette l'opposizione del pollice stesso alla palma della mano nel movimento di presa. Ciascuna delle quattro articolazioni delle dita rimanenti tra metacarpo e falangi possiede due gradi di libertà, flessione-estensione e adduzione-abduzione. Restano le articolazioni delle falangi una per il pollice due per le dita rimanenti con un grado di libertà ciascuno. nel complesso la mano presenta venti gradi di libertà, l'intero braccio 27.



*Un esempio.* Considerando lo schema della figura si immagini che si compia una flessione della spalla di  $30^\circ$  ruotando l'omero per sollevare il braccio, seguita da una flessione dell'avambraccio ancora di  $30^\circ$  sempre nel senso di sollevare il polso. Si determini la posizione del centro del polso rispetto ad un sistema inerziale posto alla base del tronco. I dati geometrici di partenza sono

riportati nelle figure. Le coordinate dell'origine del sistema (1) rispetto al sistema (0) sono :

$${}^0\mathbf{O}_1 = \begin{Bmatrix} -27 \\ 42 \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

Tutti i dati geometrici sono in cm. La lunghezza dell'omero è di 34 cm, quella dell'avambraccio 22 cm.

Una semplice osservazione dei sistemi di riferimento porta alle seguenti matrici di trasformazione:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -27 \\ -c\alpha_1 & s\alpha_1 & 0 & 42 \\ s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\alpha_2 & -s\alpha_2 & 0 & 22 \\ s\alpha_2 & c\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

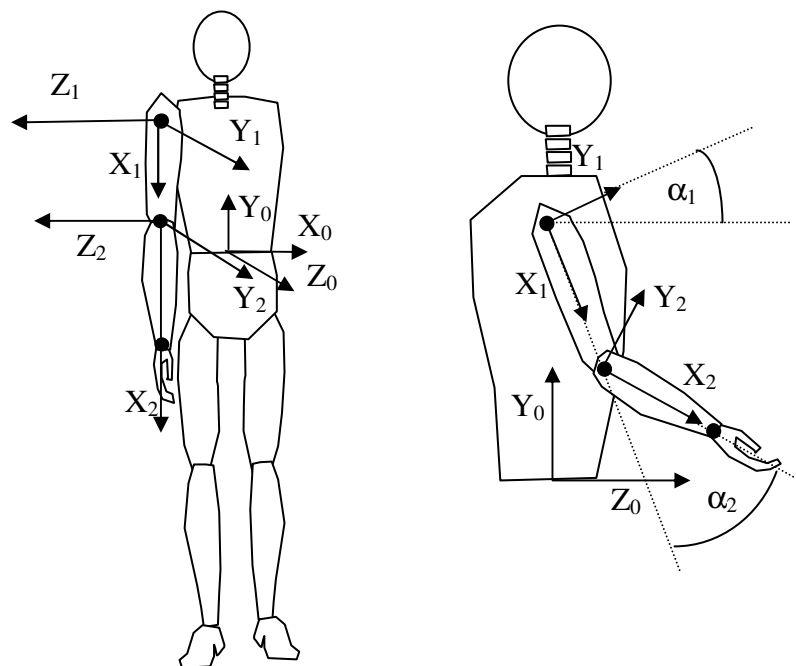
La matrice globale di rotazione è:

$${}^0_2\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} * {}^1_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -27 \\ -c(\alpha_1)*c(\alpha_2)+s(\alpha_1)*s(\alpha_2) & c(\alpha_1)*s(\alpha_2)+s(\alpha_1)*c(\alpha_2) & 0 & -34*c(\alpha_1)+42 \\ c(\alpha_1)*s(\alpha_2)+s(\alpha_1)*c(\alpha_2) & -s(\alpha_1)*s(\alpha_2)+c(\alpha_1)*c(\alpha_2) & 0 & 34*s(\alpha_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -27 \\ -0.5 & 0.87 & 0 & 12.56 \\ 0.87 & 0.5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si ha quindi per la posizione del polso:

$$\mathbf{O}_P = {}^0_2\mathbf{T} * \begin{Bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27 \\ 1.55 \\ 36.06 \\ 1 \end{Bmatrix}$$



Un metodo più classico per determinare le matrici di trasformazione è quello di partire dal sistema di base e determinare quali trasformazioni hanno portato dal sistema (0) fisso a quello mobile (1). Nel nostro caso nell'ordine si ha :

1. Una traslazione dell'origine del sistema mobile per spostarsi nella posizione  $\mathbf{O}_1$
2. Una rotazione intorno all'asse  $Y_0$ , di un angolo  $-90^\circ$
3. Una rotazione intorno ad un'asse  $Z'$  mobile di  $-90^\circ$
4. Una rotazione intorno all'asse  $Z'$  mobile di  $\alpha_1$

Il prodotto matriciale che rappresenta la sequenza è il seguente:

$${}^0_1\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 42 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c\alpha_1 & -s\alpha_1 & 0 & 0 \\ s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -27 \\ -c\alpha_1 & s\alpha_1 & 0 & 42 \\ s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato è identico a quello trovato per ispezione.

L'ordine delle matrici dipende dal tipo di trasformazione che la singola matrice rappresenta. Considerando l'esempio precedente, relativo all'arto superiore, nel passare dal sistema di base a quello o quelli della spalla, il gomito e quindi il polso non facciamo altro che aggiungere gradi di libertà alla catena cinematica. L'espressione ottenuta per la matrice globale che lega il sistema n-esimo al sistema di base è :

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} * {}^1_2\mathbf{T} * \dots * {}^{n-1}_n\mathbf{T}$$

Mentre si procede verso sistemi sempre più mobili si deve postmultiplicare le singole matrici. Può accadere però che invece di rappresentare il movimento di articolazioni successive si voglia invece rappresentare uno spostamento o una rotazione di tutto il corpo, rigidamente intorno ad un asse "fisso". In questo caso la relativa matrice deve essere premoltiplicata per quelle precedenti. Si supponga ad esempio che dopo avere calcolato la matrice  ${}^0_2\mathbf{T}$  tutto il corpo subisca una rotazione intorno all'asse  $Z_0$  di  $90^\circ$ . Avremo allora:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^0_2\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -27 \\ -0.5 & 0.87 & 0 & 12.56 \\ 0.87 & 0.5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.8660 & 0 & -12.5551 \\ 0 & 0 & -1.0000 & -27.0000 \\ 0.87 & 0.5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

La nuova posizione del polso è quindi :

$${}^0\mathbf{O}_p = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.8660 & 0 & -12.5551 \\ 0 & 0 & -1.0000 & -27.0000 \\ 0.87 & 0.5 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.56 \\ -27 \\ 36.06 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Nelle relazioni precedenti il sistema di riferimento che subisce la rotazione di  $90^\circ$  viene rinominato  $O_1$ . Il risultato dell'operazione scambia, come era prevedibile, i valori delle coordinate x e y del polso, mentre la z resta invariata. Il risultato può essere esteso a traslazioni o rotazioni di sistemi che non coincidono con l'ultimo sistema ottenuto e con quell di base. Se, dopo avere ottenuto una matrice che lega il sistema (n) al sistema (0) intendiamo ad esempio effettuare una rotazione di un angolo  $\alpha$  rispetto ad un asse  $X_i$  di un generico sistema (i) dovremo inserire la matrice che rappresenta la rotazione immediatamente prima della matrice  ${}^{i-1}\mathbf{T}$ . Infatti si pensi che dopo avere portato il sistema nella posizione (n) con la matrice  ${}^0_n\mathbf{T}$  lo si riporti nella posizione di partenza, si compia la rotazione rispetto all'asse desiderato:

$${}^0_n\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} \dots \dots \dots {}^{i-1}_i\mathbf{T} {}^i_{i+1}\mathbf{T} \dots \dots \dots {}^{n-1}_n\mathbf{T} = {}^0_i\mathbf{T} {}^i_n\mathbf{T}$$

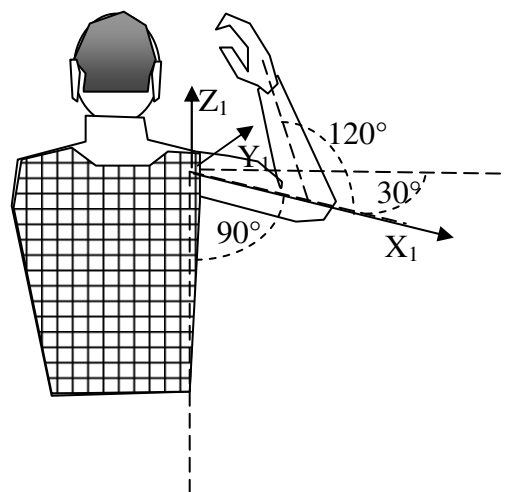
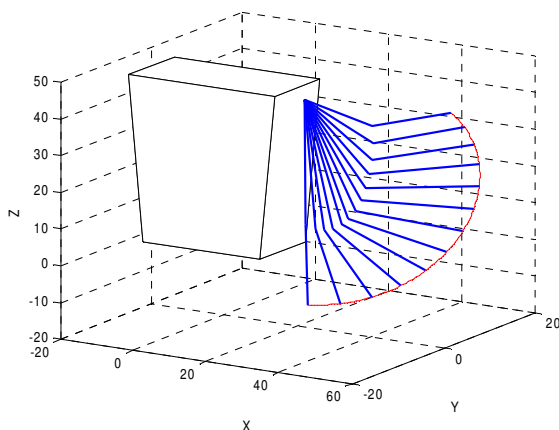
Se premoltiplichiamo l'espressione precedente per  ${}^i_0\mathbf{T}$  compiamo la rotazione rispetto ad un asse di (i) ,diventato a questo punto sistema di base, e poi premoltiplichiamo ancora per  ${}^0_i\mathbf{T}$  otteniamo:

$${}^0_1\mathbf{T} {}^1_2\mathbf{T} \dots \dots \dots {}^{i-1}_i\mathbf{T} {}^i_{i+1}\mathbf{T} \dots \dots \dots {}^{n-1}_n\mathbf{T} = {}^0_i\mathbf{T} * \mathbf{T}_{X_i, \alpha} * {}^i_0\mathbf{T} {}^i_n\mathbf{T} = {}^0_i\mathbf{T} * \mathbf{T}_{X_i, \alpha} * {}^i_n\mathbf{T}$$

Che mostra come la matrice di rotazione vada inserita nella sequenza.

### 1.12 Traiettorie

La determinazione di traiettorie di punti rilevanti del corpo umano o di altri sistemi analizzati è particolarmente semplice. Ottenuta la matrice che rappresenta il sistema mobile rispetto a quello fisso è sufficiente inserire nella matrice globale i valori degli angoli e delle traslazioni per ottenere un insieme di punti che rappresenta la traiettoria desiderata. Consideriamo ancora l'esempio



precedente e si immagini di effettuare un movimento di circonduzione dell' omero che lo porti dalla posizione di riposo ad un angolo di abduzione di  $90^\circ$  rispetto ad un asse orizzontale Y che cambia in direzione, di  $-30^\circ$  rispetto ad un' asse Z anch'esso mobile, mentre l'avambraccio ruota rispetto alla linea d'asse dell'omero di  $120^\circ$ . Per trovare la traiettoria del polso si è impiegato l'ambiente MATLAB applicando piccole rotazioni successive intorno ai tre assi dell'articolazione della spalla e

intorno all'asse Z del gomito, intorno al quale avvengono le rotazioni di flessione. La traiettoria è riportata in prospettiva nel diagramma. Viene riportato nell'appendice 1 il codice MATLAB sviluppato.

### 1.13 Analisi dell'arto inferiore

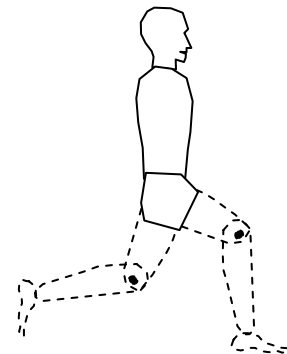
Richiamiamo brevemente nel seguito le nozioni anatomiche e fisiologiche per poter impostare un'analisi modellistica, seppur semplificata dell'arto inferiore

#### Articolazione dell'anca

L'**articolazione coxofemorale** assume notevole importanza, sia nei confronti della statica corporea, sia nella dinamica della marcia e della corsa. La pelvi appoggia bilateralmente sulle teste femorali; la funzionalità dell'appoggio è legata direttamente al perfetto centraggio dell'articolazione, ossia a un'esatta geometria architettonica dei capi articolari. Come tutte le enartrosi, la coxofemorale è un'articolazione molto mobile, sebbene in misura minore rispetto alla scapolomeroale. L'articolazione dell'anca opera infatti principalmente a sostegno del tronco, durante i movimenti della deambulazione. L'articolazione possiede tre gradi di libertà di rotazione a cui corrispondono i movimenti di flesso-estensione, intorno ad un asse trasversale, di abduzione-adduzione intorno ad un asse antero-posteriore, di rotazione interna ed esterna intorno ad un asse disposto come secondo il femore. Ciascuno di questi movimenti è limitato anatomicamente dalle possibilità di estensione dei legamenti interessati.

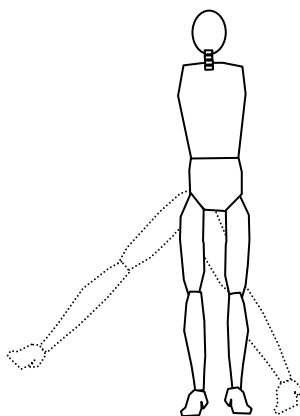
#### Estensione e flessione.

L'asse trasversale del movimento di flessoestensione sfiora l'apice del grande trocantere e attraversa l'inserzione laterale del legamento rotondo. Quando il ginocchio è flesso a meno di 90°, l'ampiezza dell'escursione flessoria corrisponde ad un angolo di 120°; l'estensione è assai più limitata e corrisponde ad un angolo di circa 15°. Il movimento di estensione è arrestato dai legamenti ileofemorale e pubofemorale. I movimenti di flessione ed estensione possono essere compiuti sia con l'articolazione del ginocchio estesa che inflessa. La flessione dell'anca raggiunge limiti più ampi con il ginocchio flesso.



#### Abduzione e adduzione.

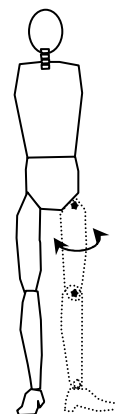
Dei movimenti di abduzione e adduzione il primo è più ampio e riveste importanza maggiore. L'escursione totale di questo movimento è di circa 80° ed è massima con l'anca in lieve flessione e rotazione esterna; il legamento rotondo vale a limitare soprattutto il movimento di adduzione che non supera i 30°. La massima escursione del movimento di abduzione si ottiene con la spaccata frontale, con angoli di 90° ottenuti dai ginnasti con adeguato allenamento



#### Rotazione esterna ed interna

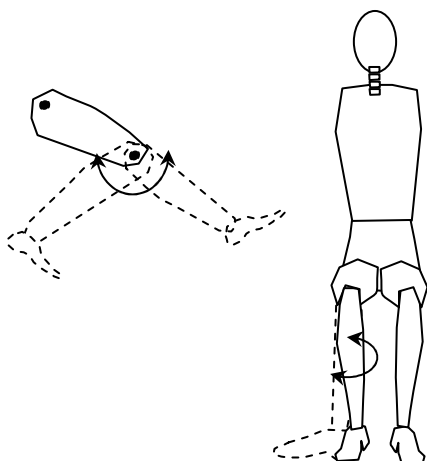
Il movimento di rotazione si svolge intorno ad un asse che passa per il centro della testa del femore raggiungendo il punto centrale dell'epifisi inferiore, tra i condili. L'escursione totale di questo movimento in stazione eretta corrisponde a 50-60°; è maggiore quando l'anca è in atteggiamento di flessione.

I movimenti elementari descritti possono essere composti per realizzare un movimento di circonduzione dell'anca. Dopo la spalla l'anca è il più mobile dei giunti del nostro corpo.



### Articolazione del ginocchio

Dovremmo innanzitutto ricordare che, a ginocchio esteso, l'asse del femore forma con l'asse della gamba un angolo aperto lateralmente di  $175^\circ$  (valgismo fisiologico del ginocchio). L'articolazione possiede due gradi di libertà a cui corrispondono i movimenti elementari di flessione-estensione e rotazione. La *flessione-estensione* si svolge intorno ad un asse trasversale che passa per i condili femorali. L'escursione, dall'estensione massima alla flessione massima, ottenuta con le sole forze muscolari, si aggira sui  $120-140^\circ$  ed è condizionata dalla posizione dell'anca. Se la flessione viene forzata tramite l'applicazione di forze esterne si possono guadagnare ancora circa  $30^\circ$ . Il movimento relativo dei condili femorali sul piatto tibiale durante la flessione del ginocchio non è un moto di rotolamento puro, ma un moto di rotolamento con strisciamento, guidato e limitato dai legamenti crociati. Lo studio cinematico del ginocchio verrà affrontato nel seguito in maggiore dettaglio.



La *rotazione del ginocchio* esterna ed interna avviene intorno ad un asse passante per la tibia. Il movimento è molto limitato a ginocchio esteso. Nel ginocchio in estensione i legamenti crociati si oppongono alla rotazione interna; i legamenti collaterali e i menischi, specialmente quello laterale, limitano l'extrarotazione. A ginocchio inflesso a  $90^\circ$  è possibile ottenere una rotazione interna massima di  $30-35^\circ$  e una rotazione esterna massima di  $40-45^\circ$ . I movimenti di rotazione sono limitati dai legamenti crociati, dai collaterali e dai menischi.

### Articolazione tibiotarsica

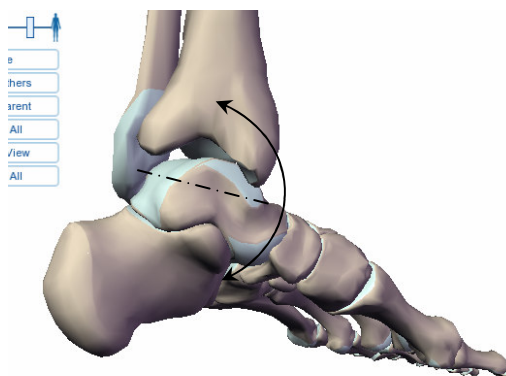
L'articolazione tibiotarsica ha innanzitutto il ruolo di scaricare il peso del corpo sulle arcate plantari. Il tarso è un sistema costituito da 7 ossa, astragalo, calcagno, scafoide, cuboide e le tre ossa cuneiformi, articolate in modo tale da formare una cavità verso il basso. In senso strutturale il tarso verrebbe definito una volta portante. La sua struttura permette di sopportare i carichi elevati dovuti al peso del corpo sovrastante ed i relativi sovraccarichi dinamici. La stabilità dell'equilibrio che, in altre articolazioni, è mantenuta in primo luogo da resistenze legamentose, necessita quindi del continuo impegno dei muscoli gastrocnemio e soleo.

Nell'articolazione sono possibili movimenti di:

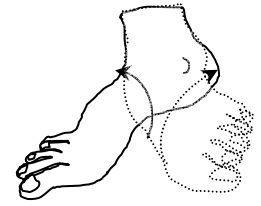
*flessione-estensione* intorno ad un asse trasversale; il movimento realizza una flessione dorsale di  $20^\circ$  e una flessione plantare o estensione di  $30^\circ$ .

Nell'articolazione tibioastragalica sono completamente bloccati i movimenti di altra natura essendo l'astragalo fermato nella pinza tibiofibulare con l'aiuto di un robusto complesso legamentoso. La pinza può modicamente allargarsi o restringersi grazie all'elasticità dell'articolazione tibiofibulare; così essa si adatta al volume d'incastro dell'astragalo che ruota nella pinza stessa durante i movimenti articolari. Eventuali violenti spostamenti passivi rotatori e trasversali dell'astragalo provocano la rottura della giunzione fibroelastica tibiofibulare, la rottura dei legamenti collaterali, oppure la frattura dei malleoli.

*Eversione-inversione con prono-supinazione e adduzione-abduzione.* L'astragalo è articolato al calcagno e anteriormente all'osso navicolare. Senza entrare in dettaglio nel dominio dell'anatomia osserviamo che dal punto di vista cinematico il movimento relativo tra calcagno ed astragalo è un movimento composito fatto di atti di moto elementari di rototraslazione. Non è pertanto definibile un



unico asse intorno al quale si svolge il movimento relativo. L'inversione con adduzione, supinazione e modica flessione porta il piede a ruotare verso il piano mediale. L'eversione è accompagnata abduzione, pronazione e modica estensione. Questi movimenti sono d'importanza capitale per una corretta deambulazione perché permettono al piede di ruotare sotto carico trasferendo l'area di contatto dal calcagno dove avviene la fase iniziale del contatto alla prima falange, ultima area prima del distacco del piede. Il piede, come gli altri segmenti dell'arto inferiore, svolge compiti sia statici che dinamici.



Nella stazione eretta, il piede poggia sul suolo con tre punti scheletrici e cioè:

un *appoggio anterointerno* che corrisponde alla testa del 10° osso metatarsale e alle sue ossa sesamoidi;

un *appoggio anteroesterno* che corrisponde alla testa del 4° e 5° metatarsale;

un *appoggio posteriore*, sulla tuberosità posteriore del calcagno.

Per quanto riguarda la deformazione della volta plantare:

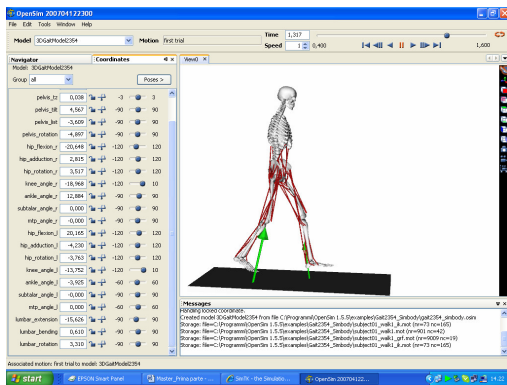
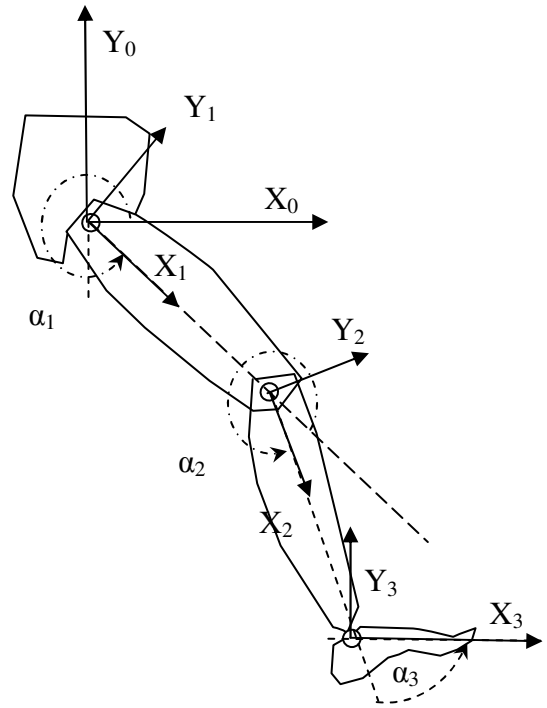
nel **primo tempo** di appoggio del piede sul tallone, non si ha variazione alcuna;

nel **secondo tempo** di appoggio totale del piede, la volta si appiana sotto il carico gravitazionale;

nel **terzo tempo** mentre si solleva il tallone e si sposta l'appoggio sull'avampiede, la volta plantare viene schiacciata dal peso del corpo.

## Un modello cinematico semplificato dell'arto inferiore

La figura accanto, rappresenta un modello semplificato dell'arto inferiore, in cui i sistemi di riferimento sono stati applicati ai tre segmenti secondo la convenzione di Denavit-Hartenberg. La figura mostra come devono essere valutati gli angoli tra i diversi assi X nei tre sistemi di riferimento. Si parte dall'asse di riferimento e si ruota in senso antiorario sino ad incontrare l'asse mobile. La matrice che rappresenta i movimenti della gamba deve essere costruita in base alle esigenze del modello. Se, ad esempio, sono presenti soltanto movimenti di flessione-estensione dell'anca, del ginocchio e della caviglia, si potrà in prima approssimazione, considerare il modello piano con soltanto tre gradi di libertà. Modelli più complessi e meglio rispondenti alla realtà anatomica e fisiologica possono essere sviluppati all'interno di ambienti di modellazione specifici per queste applicazioni. Uno di



questi, meritevole di citazione per il fatto che si tratta di un software la cui licenza viene concessa gratuitamente alla comunità scientifica, è OPEN SIM, basato sulle leggi fondamentali della meccanica e capace di risolvere problemi di analisi del movimento, cinematica e dinamica. A titolo di esempio nella figura è

stato riportata un'immagine tratta dall'ambiente citato

Un'ultima osservazione riguarda la costruzione della matrice  ${}^0_3\mathbf{T}$  che lega il sistema solidale alla caviglia al sistema fisso con origine nell'articolazione dell'anca. Se partiamo da questa articolazione è evidente che la mobilità dell'anca (rappresentata in questo modello semplificato con un solo grado di libertà invece dei tre canonici) porta ad una matrice di sola rotazione in quanto il sistema mobile solidale al femore ha la stessa origine del sistema fisso. Il secondo grado di libertà, quello del ginocchio, comporta una matrice di rototraslazione con rotazione intorno a  $Z_2$ . Analogamente il grado di libertà nella caviglia comporta un'ulteriore matrice di rototraslazione. Il risultato finale è dato dal prodotto di matrici:

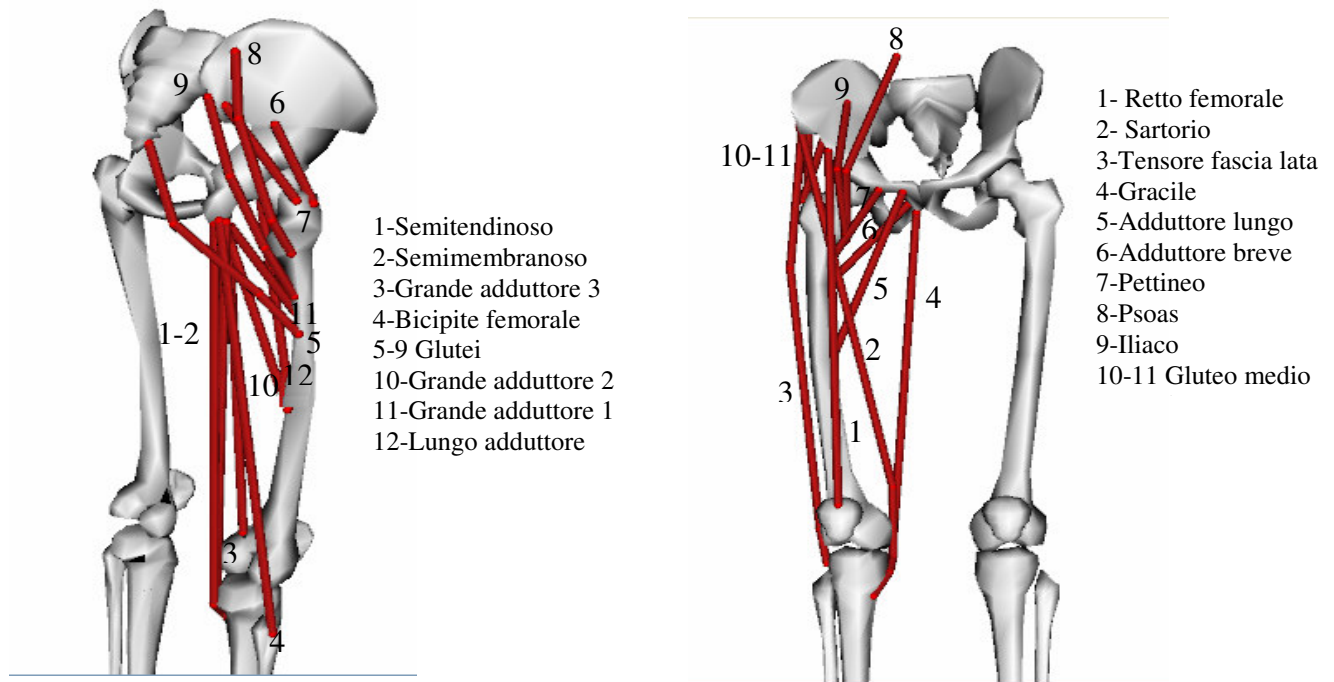
$${}^0_3\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c\alpha_1 & -s\alpha_1 & 0 & 0 \\ s\alpha_1 & c\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha_2 & -s\alpha_2 & 0 & l_1 \\ s\alpha_2 & c\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\alpha_3 & -s\alpha_3 & 0 & l_2 \\ s\alpha_3 & c\alpha_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c\alpha_{123} & -s\alpha_{123} & 0 & l_1c\alpha_1 + l_2c\alpha_{12} \\ s\alpha_{123} & c\alpha_{123} & 0 & l_1s\alpha_1 + l_2s\alpha_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con  $l_1$ ,  $l_2$  lunghezze del femore e della tibia e  $\alpha_{12} = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $\alpha_{123} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ . Il risultato è formalmente identico a quello ottenuto per il modello dell'arto superiore. E' opportuno sottolineare il carattere estremamente semplificato del modello costruito. Rimandando ai testi di anatomia per una completa descrizione morfologica dei muscoli richiamiamo qui la funzione e la geometria dei muscoli divisi per movimento elementare attuato:



*Flessione dell'anca.*



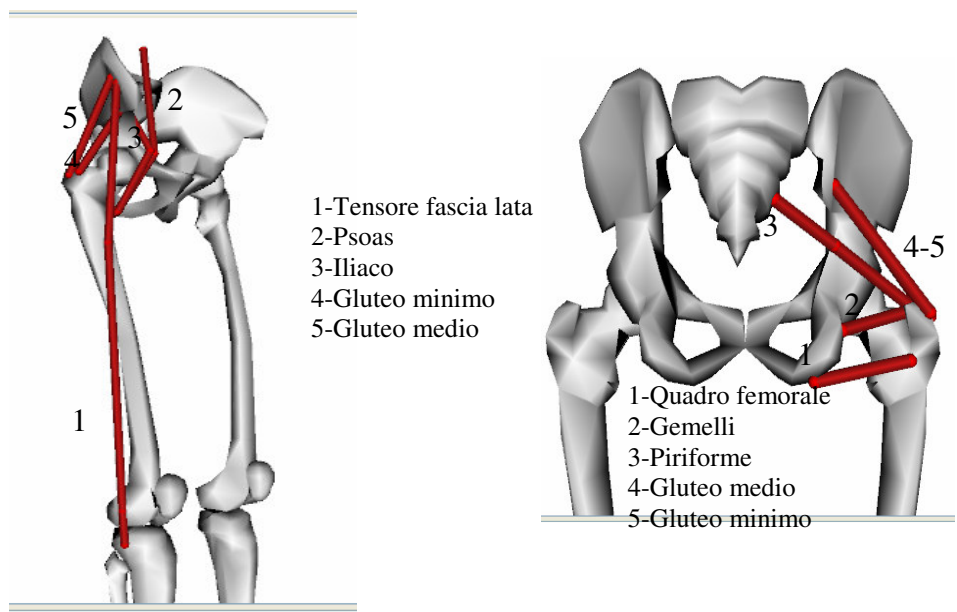
La flessione dell'anca è attuata dai muscoli sinteticamente descritti nella figura a destra in alto. La cooperazione tra muscoli diversi non è dominata dalla volontà ma si svolge secondo meccanismi non del tutto chiari. Nel cammino e nella corsa la flessione dell'anca è di norma accompagnata da altri movimenti elementari. Come sarà mostrato nel seguito le forze muscolari dipendono sostanzialmente da tre fattori, potenziale di attivazione, lunghezza del muscolo e velocità di deformazione. Durante il movimento di un'articolazione le forze muscolari non sono costanti ma variano in funzione dei parametri menzionati.

*Estensione dell'anca*

L'estensione dell'anca è attuata da una serie di muscoli, tra i quali gli adduttori che svolgono una duplice funzione. I muscoli principali, quelli cioè con la leva più favorevole e con la maggiore massa sono i glutei. L'estensione dell'anca ha limiti diversi a ginocchio esteso e ginocchio inflesso.

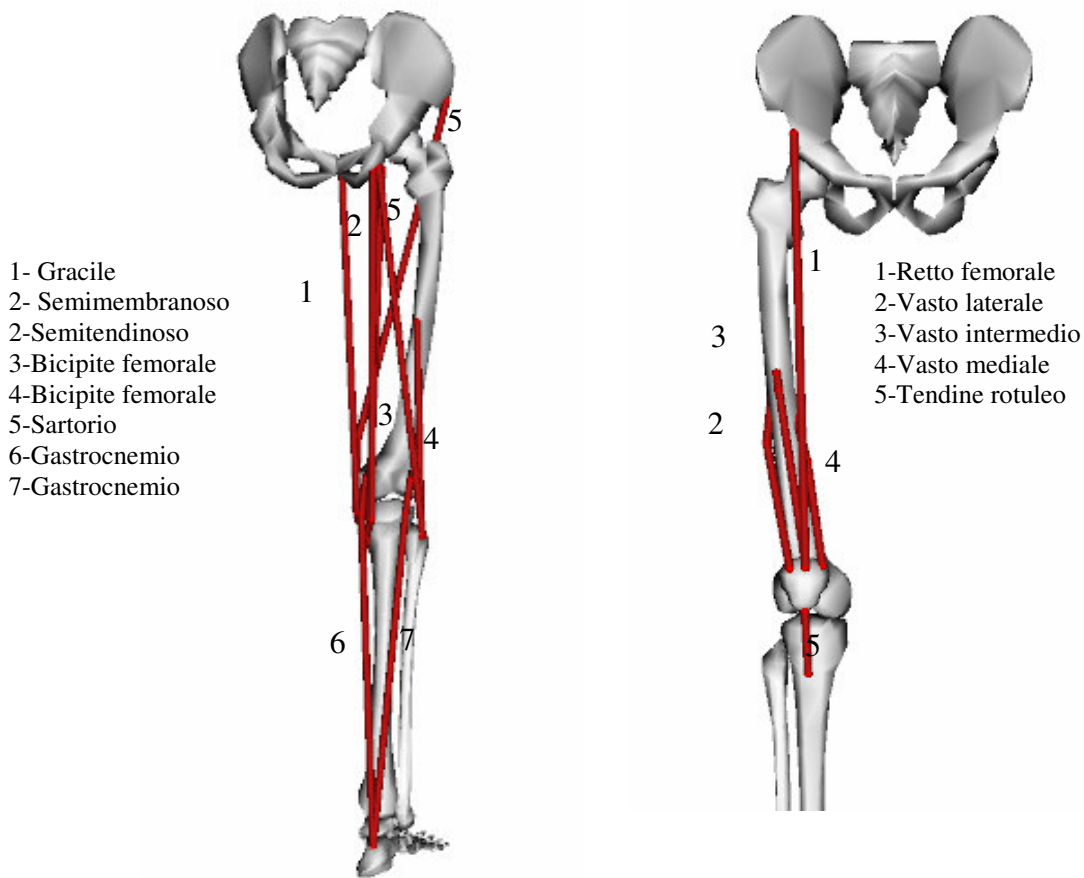
*Rotazione dell'anca*

Nelle due figure sono rappresentati i principali muscoli delegati alla rotazione interna (a sinistra) e rotazione esterna (a destra dell'anca). Le figure rappresentano naturalmente solo l'andamento geometrico della linea d'asse dei muscoli e non la forma anatomica.



### Flesso-estensione del ginocchio

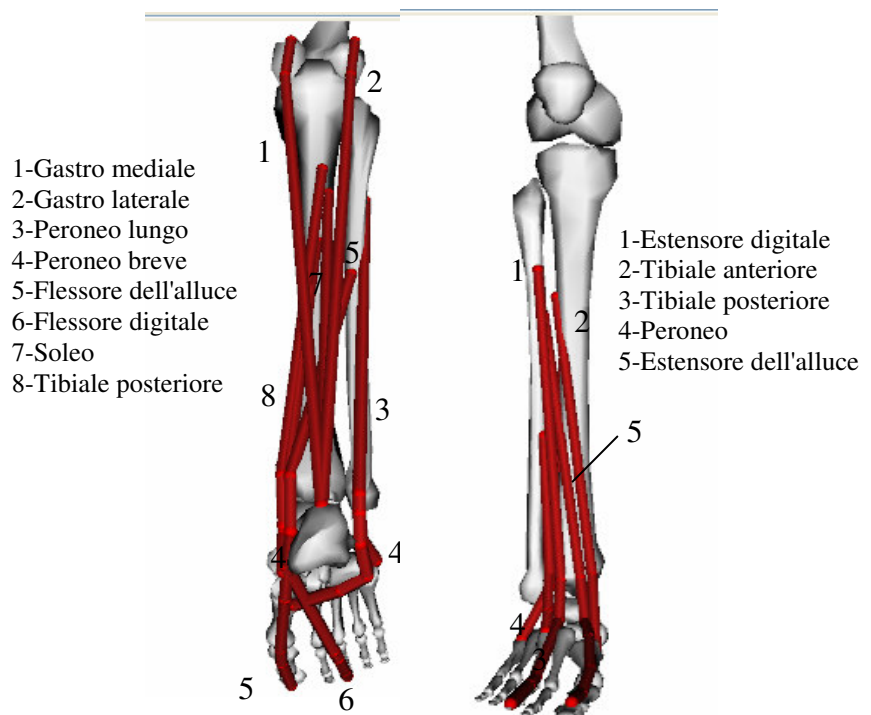
I muscoli attivi nella flessioestensione del ginocchio sono riportati per la flessione nella figura a sinistra, per l'estensione a destra. Per quest'ultima appare evidente il ruolo di connettore giocato



dalla rotula che riunisce tutti i capi del quadricipite e trasmette la forza risultante al legamento patellare. Per la flessione è da notare che sia il gastrocnemio, costituito in realtà da due muscoli identici che il sartorio e il bicipite femorale sono muscoli tracciati attraverso due articolazioni. Ricordiamo che l'estensione del ginocchio richiede grande potenza muscolare in quanto nella stazione eretta è un'operazione anti-gravità.

### Flesso estensione della caviglia.

Le immagini mostrano i muscoli che attivano la flessione e l'estensione della caviglia. E' opportuno ricordare che si è trascurato il movimento di inversione-eversione, anch'esso di grande importanza nell'analisi del cammino.



## ESERCIZI.

1. Si eseguano alcuni schizzi per rappresentare i movimenti delle articolazioni dell'arto superiore, con la nomenclatura medica.
2. Si individuino i valori approssimativi delle escursioni max e min per i movimenti della spalla del gomito e del polso.
3. Considerando i valori estremi precedenti si tracci il volume di lavoro dell'arto superiore con riferimento al polso (volume descritto dal polso) per tutti i possibili movimenti permessi dall'articolazione
4. Si descrivano tutte le articolazioni dell'arto superiore descrivendo la categoria a cui ciascuna articolazione appartiene.
5. Si calcoli la matrice di trasformazione spalla-polso per un angolo di flessione della spalla di  $30^\circ$  di abduzione di  $45^\circ$ , rotazione  $15^\circ$  e flessione del gomito di  $60^\circ$ .
6. Si inverta la matrice calcolata in precedenza.
7. Sopra uno schizzo del corpo umano con le articolazioni dell'arto superiore e inferiore si pongano i sistemi di riferimento usando la convenzione di Denavit-Hartenberg.
8. Si eseguano considerazioni geometriche per stabilire l'escursione verticale del baricentro del corpo umano durante il cammino.
9. Si scriva una procedura Matlab per calcolare e rappresentare graficamente il movimento di un sistema articolato piano con due segmenti.